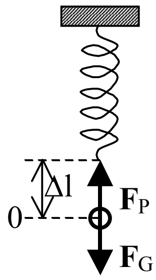
18 Kmitavý pohyb

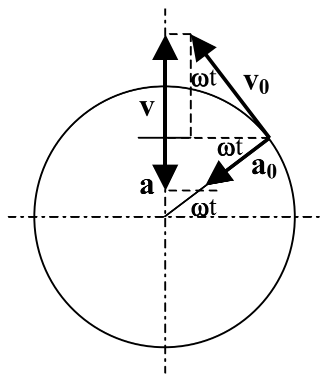
- mechanický pohyb sústavy charakterizovaný veličinami, ktoré sú periodickými funkciami času
- každé zariadenie, ktoré môže voľne bez vonkajšieho pôsobenia) kmitať, nazýva sa o***scilátor***
- periodicky opakujúca sa časť kmitavého pohybu sa nazýva ***kmit***
- charakteristické veličiny kmitavého pohybu:
  - ***perióda (doba kmitu) T:***
    - čas, za ktorý prebehne jeden kmit a oscilátor sa dostane do zvoleného začiatočného stavu; meria sa v sekundách
  - ***frekvencia (kmitočet) f:***
    - rovná sa počtu kmitov, ktoré prebehnú za sekundu; je prevrátenou hodnotou periódy:
      - $f = \frac{1}{T}$, $[f] = s^{-1} = Hz$ (jednotkou frekvencie je ***Herz***)
- kmitavý pohyb môžeme znázorniť v ***časovom diagrame***, v ktorom sú znázornené okamžité polohy kmitajúceho telesa ako funkcie času; časovým diagramom ***jednoduchého (harmonického) kmitavého pohybu*** je sínusoida

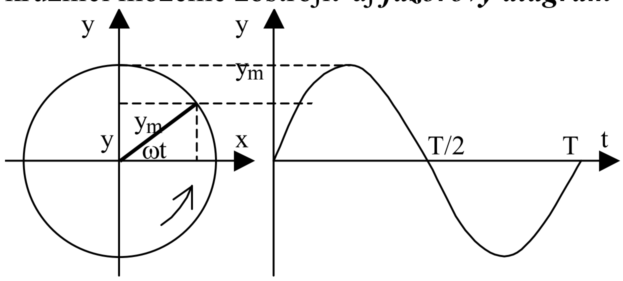
18.1 pružinový oscilátor



- patrí medzi mechanické oscilátory; na začiatku máme pružinu dĺžky *l*, túto pružinu charakterizuje ***tuhosť pružiny k*** (od tuhosti pružiny závisí jej predĺženie počas kmitavého pohybu)
- keď na pružinu zavesíme závažie s hmotnosťou *m*, pružina sa pôsobením tiažovej sily $\vec{F}_G$ predĺži o *Δl*; v dôsledku pružnosti pružiny vznikne ***sila pružnosti*** $\vec{F}_p$, ktorej veľkosť sa v závislosti od predĺženia zväčšuje. Sila $\vec{F}_p$ má opačný smer ako tiažová sila $\vec{F}_G$, ktorá pôsobí na závažie. Po istom čase sa ustáli ***v rovnovážnej polohe O***, v ktorej je veľkosť tiažovej sily a sily pružnosti rovnaná, ale majú opačný smer; platí:
  - $F_G = F_p \Rightarrow mg = k.\Delta l$
- keď pružinu predĺžime o *y*, tak začne kmitať; výchylka *y* z rovnovážnej polohy sa volá ***okamžitá výchylka***, vzhľadom na rovnovážnu polohu nadobúda kladné aj záporné hodnoty. V istých okamihoch dosahuje *y* najväčšie kladné, prípadne záporne hodnoty – túto najväčšiu hodnotu okamžitej výchylky nazývame ***amplitúda výchylky*** y_m
- pre výslednú silu *F*,. ktorá spôsobuje kmitanie, platí:
  - $F = mg - k(\Delta l + y) = \overbrace{mg - k.\Delta l}^{0} - ky = -ky$
  - znamienko mínus vyjadruje, že sila *F* a okamžitá výchylka majú v každom okamihu opačný smer
- ***pohybová rovnica:***
  - $ma = -ky \Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{k}{m}y \Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 y$, kde ***ω*** je ***uhlová frekvencia***
  - pre uhlovú frekvenciu, periódu a frekvenciu platí:
    - $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \wedge \omega = \sqrt{\frac{k}{m,}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$
- riešením pohybovej rovnice dostaneme:
  - ***poloha hmotného bodu v čase:***
    - $y = y_m \sin(\omega t + \varphi)$
  - ***okamžitá rýchlosť:***

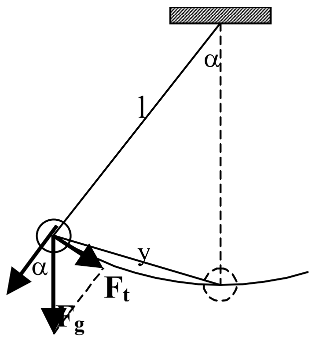
        - $\frac{dy}{dt} = v = y_m \omega \cos(\omega t + \varphi)$
    - ***okamžité zrýchlenie:***
        - $\frac{d^2 y}{dt^2} = a = -y_m \omega^2 \sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 y$
        - zrýchlenie kmitavého pohybu je priamo úmerné okamžitej výchylke a v každom okamihu má opačný smer ako okamžitá výchylka
    - výraz v zátvorke $(\omega t + \varphi)$ sa volá ***fáza*** a φ je ***fázový posun*** a určuje hodnotu veličiny harmonického kmitania v začiatočnom okamihu (*t=0 s*)
- kmitavý pohyb môžeme odvodiť aj z rovnomerného pohybu hmotného bodu po kružnici (kmitavý pohyb zodpovedá priemetu rovnomerného pohybu po kružnici do zvislej polohy); pomocou rovnomerného pohybu po kružnici môžeme zostrojiť aj ***fázorový diagram***





-

18.2 matematické kyvadlo



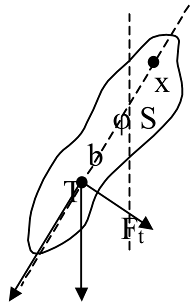
- patrí medzi mechanické oscilátory; kyvadlo je hmotný bod zavesený na tuhom vlákne zanedbateľnej hmotnosti; kmitanie spôsobuje zložka tiažovej sily F_t
- pre silu, ktorá spôsobuje kmitanie, platí:
    - $F_t = -mg \sin \alpha$
- pre uhly menšie ako 5°, môžeme použiť:
    - $\alpha = \frac{s}{l} \approx \frac{y}{l} \Rightarrow \sin \alpha \approx \alpha \approx \frac{y}{l}$
- pre silu F_t platí:
    - $F_t = -mg \frac{y}{l} = -\frac{mg}{l} y$
- pohybová rovnica:
    - $ma = -\frac{mg}{l} y \Rightarrow \frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{g}{l} \Rightarrow \frac{d^2 y}{dt^2} = -\omega^2 y$
- pre periódu kmitov na matematickom kyvadle platí:
    - $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}}$

18.3 fyzikálne kyvadlo

- pod fyzikálnym kyvadlom rozumieme každé teleso, ktoré sa vplyvom vlastnej tiaže kýve okolo vodorovnej osi neprechádzajúcej ťažiskom
- kmitanie spôsobuje zložka tiažovej sily:
    - $F_t = -mg \sin \varphi$
- pre uhly menšie ako 5 ° platí:
    - $F_t = -mg\varphi$

- znamienko mínus vyjadruje, že zložka tiažovej sily, ktorá spôsobuje kmitanie, má vždy opačný smer ako okamžitá výchylka

- pri fyzikálnom kyvadle ide v podstate o otáčavý pohyb telesa okolo pevnej osi, takže možno použiť pohybovú rovnicu rotujúceho telesa:



$M = J\varepsilon$

- $-mgb\sin\varphi = J\varepsilon \Rightarrow -mgb\varphi = J\dfrac{d^2\varphi}{dt^2} \Rightarrow \dfrac{d^2\varphi}{dt^2} = -\dfrac{mgb}{J}\varphi$

  $\dfrac{d^2\varphi}{dt^2} = -\omega^2\varphi$, kde $\omega^2 = \dfrac{mgb}{J}$

  - b je vzdialenosť stredu otáčania S od ťažiska T

- pre ***periódu kmitov*** kmitov platí:
  - $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{J}{mgb}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{J_0 + mb^2}{mgb}}$
  - J_0 je ***moment zotrvačnosti telesa*** vzhľadom na os prechádzajúcu ťažiskom

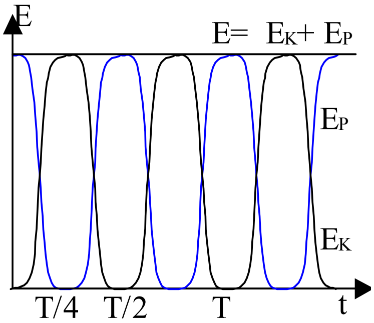
18.3.1 redukovaná dĺžka fyzikálneho kyvadla

- redukovaná dĺžka fyzikálneho kyvadla je vzájomná vzdialenosť dvoch osí nesymetricky položených vzhľadom na ťažisko, okolo ktorých sa kýve kyvadlo s rovnakou periódou
- pre redukovanú dĺžku platí:
  - $l = b + x$
- z rovnosti period vyplýva:
  - $\dfrac{J_0 + mx^2}{mgx} = \dfrac{J_0 + mb^2}{mgb}$

    $mbx^2 - \left(J_0 + mb^2\right)x + J_0 b = 0$
- riešením tejto rovnice dostaneme dva korene:
  - $x_1 = a$

    $x_2 = \dfrac{J_0}{mb}$
- tejto úlohe vyhovuje riešenie $x_2 = \dfrac{J_0}{mb}$, takže pre redukovanú dĺžku platí:
  - $l = b + \dfrac{J_0}{mb} = \dfrac{J_0 + mb^2}{mb} = \dfrac{J}{mb}$
- redukovanú dĺžku fyzikálneho kyvadla možno interpretovať aj ako dĺžku takého matematického kyvadla, ktoré sa kýve s rovnakou periódou ako fyzikálne kyvadlo:
  - $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{b + \dfrac{J_0}{mb}}{g}}$

18.4 premeny energie v mechanickom oscilátore



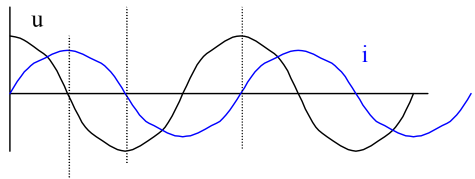
- pre potenciálnu energiu napnutej pružiny platí:
  - $W = \int_0^y F.dy = \int_0^y ky.dy = k\int_0^y y.dy = \dfrac{1}{2}ky^2 = E_p$
- pri kmitaní platí ***zákon zachovania energie*** (periodicky sa mení potenciálna energia oscilátora na kinetickú energiu a naopak). Celková energia oscilátora je konštantná a v každom okamihu sa rovná súčtu potenciálnej a kinetickej energie

- $E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}ky^2 = \frac{1}{2}my_m^2\omega^2\cos^2\omega t + \frac{1}{2}ky_m^2\sin^2\omega t \Rightarrow$
- $E_k + E_p = \frac{1}{2}ky_m^2\cos^2\omega t + \frac{1}{2}ky_m^2\sin^2\omega t = \frac{1}{2}ky_m^2\overbrace{\left(\cos^2\omega t + \sin^2\omega t\right)}^{1} = \frac{1}{2}ky_m^2$
- keď teleso dosiahne amplitúdu výchylky, je kinetická energia nulová, teda celú energiu tvorí potenciálna energia, pre ktorú platí:
  - $E_p = \frac{1}{2}ky_m^2$

- v praxi dochádza k ***tlmenému kmitaniu***; amplitúda sa postupne zmenšuje (spôsobuje to odpor prostredia, trenie); vlastné kmitanie oscilátora je vždy tlmené

18.5 elektromagnetický oscilátor

- na rozdiel od mechanického oscilátora, v ktorom sa periodicky mení potenciálna energia na kinetickú, sa s elektromagnetickom oscilátore mení elektrická energia na magnetickú (najjednoduchším príkladom elektrického obvodu, ktorý má tieto vlastnosti, je obvod s cievkou a kondenzátorom – ***LC obvod (oscilačný obvod)***
- na začiatku kondenzátor nabijeme zo zdroja jednosmerného napätia a pripojíme ho k cievke; za štvrtinu periódy sa vybije a prúd je maximálny, vzniká indukované napätie. Za ďalšiu štvrtinu periódy sa kondenzátor nabije indukovaným prúdom, ale polarita je už opačná. V druhej polovici periódy sa tento dej opakuje opačným smerom.
  - amplitúdy napätia a prúdu sa postupne zmenšujú, až kmitanie zanikne. Príčinou je odpor R oscilačného obvodu, v ktorom sa mení energia elektrického a magnetického poľa na vnútornú energiu vodiča; nastáva tlmenie kmitov
  - časové diagramy napätia a prúdu v oscilačnom obvode sú navzájom posunuté o štvrtinu periódy. V okamihu, keď je prúd v obvode nulový, napätie a teda aj náboj na kondenzátore sú najväčšie. naopak maximálnej hodnote prúdu zodpovedá nulový náboj kondenzátora. To dokazuje, že v elektromagnetickom oscilátore sa periodicky mení elektrická energia na magnetickú a naopak.



- kondenzátor má ***elektrickú energiu:***
  - $E_e = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$
- nabitý kondenzátor je zdrojom prúdu v cievke. V okolí cievky vzniká magnetické pole s ***magnetickou energiou:***
  - $E_m = \frac{1}{2}LI^2$
- mechanickým a elektromagnetickým poľom platia nasledujúce ***analógie***:

Mechanický oscilátor		Elektromagnetický oscilátor	
okamžitá výchylka	y	okamžitý náboj	q
rýchlosť	v	okamžitý prúd	i
potenciálna energia	E_p	elektrická energia	E_e
kinetická energia	E_k	magnetická energia	E_m
sila	F	okamžité napätie	u
hmotnosť	m	indukčnosť	L
tuhosť pružiny	$k = \frac{F}{y}$	recipročná hodnota kapacity	$\frac{1}{C} = \frac{u}{q}$

- použitím týchto analógií medzi oscilátormi dostaneme:
  - ***perióda a frekvencia kmitov:***

- $T_0 = 2\pi\sqrt{LC} \Rightarrow f_0 = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{LC}}$

  - ***okamžitý náboj*** sa mení podľa vzťahu:
    - $q = Q_m \cos\omega t$
  - ***uhlová frekvencia vlastného kmitania*** oscilačného obvodu:
    - $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
  - ***okamžité napätie*** medzi platňami kondenzátora:
    - $u = \frac{Q_m}{C}\cos\omega t = U_m \cos\omega t$
  - ***okamžitý prúd*** v oscilačnom obvode je posunutý p začiatočnú fázu $\varphi = -\frac{\pi}{2}$:
    - $i = I_m \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = I_m \sin\omega t$

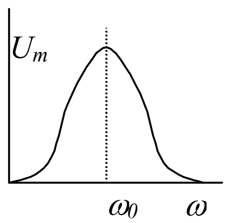
18.6 energia mechanického a elektromagnetického oscilátora

- ***mechanický oscilátor:***
  - potenciálna energia: $E_p = \frac{1}{2}ky^2$
  - kinetická energia: $E_k = \frac{1}{2}mv^2$
- ***elektromagnetický oscilátor:***
  - elektrická energia: $E_e = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$
  - magnetická energia: $E_m = \frac{1}{2}LI^2$

18.7 nútené kmitanie oscilátora

- nútené kmitanie vzniká pôsobením sily alebo napätia na oscilátor aj na objekty, ktoré nemajú vlastnosť oscilátora (netlmené harmonické kmitanie vznikne, keď sa straty nahrádzajú počas celej periódy; to možno dosiahnuť, keď na oscilátor pôsobí nepretržite harmonická sila $F = F_m \sin\omega t$ alebo harmonické napätie $U = U_m \sin\omega t$; pôsobením tejto sily, prípadne napätia, je v oscilátore vynucované netlmené harmonické kmitanie, ktoré sa volá ***nútené kmitanie oscilátora***).
- frekvencia núteného kmitania závisí od frekvencie pôsobiacej sily, prípadne napätia, a nezávisí od vlastnosti kmitajúceho objektu. Nútené kmitanie je netlmené.

18.7.1 rezonancia oscilátora



- amplitúda nútených kmitov dosahuje najväčšiu hodnotu v okamihu, keď frekvencia nútených kmitov dosiahne vlastnú frekvenciu oscilátora – táto frekvencia sa nazýva ***rezonančná frekvencia***; pri tejto frekvencii nastane ***rezonancia oscilátora***
- amplitúda nútených kmitov pri rezonančnej frekvencii je väčšia, ako by zodpovedalo amplitúde sily, príp. napätia, ktoré kmitanie spôsobilo
- rezonanciu môžeme považovať za vzájomné pôsobenie dvoch oscilátorov. Jeden je zdrojom núteného kmitania (***oscilátor***) a druhý sa pôsobením zdroja nútene rozkmitá (***rezonátor***)

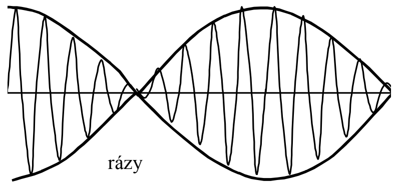
18.8 skladanie kmitov

18.8.1 kmity v jednej priamke

- ***izochrónne kmity:***
    - izochrónne kmity majú rovnakú uhlovú frekvenciu (periódu)
    - pôsobia dve sily v jednej priamke; ak by pôsobili samostatne, tak obe by vyvolali kmity
        - $$y_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$ $$y_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$
    - výsledný pohyb je daný sčítaním oboch rovníc (dostaneme opäť harmonickú funkciu:
        - $$y = y_1 + y_2 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \Rightarrow$$ $$y = A_1 \cos\omega t.\cos\varphi_1 - A_1 \sin\omega t.\sin\varphi_1 + A_2 \cos\omega t.\cos\varphi_2 - A_2 \sin\omega t.\sin\varphi_2 \Rightarrow$$ $$y = \cos\omega t.\underbrace{(A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2)}_{A.\cos\varphi} - \sin\omega t.\underbrace{(A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2)}_{A.\sin\varphi}$$
    - zavádzame substitúciu:
        - $$A.\cos\varphi = A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2$$ $$A.\sin\varphi = A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2$$
    - dosadenie (dostaneme ***výslednú rovnicu harmonického pohybu***):
        - $$y = A\cos\omega t.\cos\varphi - A\sin\omega t.\sin\varphi$$ $$y = A\cos(\omega t + \varphi)$$
    - ***výsledná fáza*** (dostaneme ju zo substitúcií)***:***
        - $$tg\varphi = \frac{A\sin\varphi}{A\cos\varphi} = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$$ $$\varphi = arctg\left(\frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}\right)$$
    - ***výsledná amplitúda*** (umocníme obe substitúcie a sčítame ich):
        - $$A^2\sin^2\varphi = A_1^2\sin^2\varphi_1 + 2A_1A_2\sin\varphi_1\sin\varphi_2 + A_2^2\sin^2\varphi_2$$ $$A^2\cos^2\varphi = A_1^2\cos^2\varphi_1 + 2A_1A_2\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + A_2^2\cos^2\varphi_2$$
        - $$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$ $$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$
- ***neizochrónne kmity:***
    - kmity, ktoré majú rovnaké amplitúdy a fázové posuny, líšia sa uhlovou frekvenciou
    - pôsobia dve sily v jednej priamke, ktoré spôsobujú kmity:
        - $$y_1 = A\cos(\omega_1 t + \varphi)$$ $$y_2 = A\cos(\omega_2 t + \varphi)$$
    - výsledný pohyb je daný sčítaním oboch rovníc (dostaneme výslednú rovnicu kmitavého pohybu):
        - $$y = y_1 + y_2 = A\cos(\omega_1 t + \varphi) + A\cos(\omega_2 t + \varphi)$$ $$y = 2A\cos\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t.\cos\left[\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} + \varphi\right]$$
    - ***výsledná uhlová frekvencia:***
        - $$\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{4\pi}{\omega_1 + \omega_2}$$
    - ***výsledná amplitúda:***

- $A' = 2A\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t$

- pri porovnateľných uhlových frekvenciách vznikajú ***rázy:***
  - výsledná amplitúda závisí od času *t*, a preto pre ***periódu zmeny amplitúdy*** platí:
    - $T' = \frac{2\pi}{\omega'} = \frac{4\pi}{\omega_1 - \omega_2}$
  - pre ***periódu rázu*** platí:
    - $T_r = \frac{T'}{2} = \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2}$

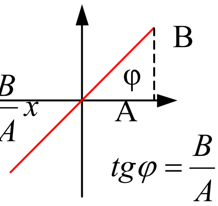


- ***kolmé kmity:***
  - pôsobia dve sily ktoré sú na seba kolmé
  - máme kmity, ktoré majú rovnakú uhlovú frekvenciu, ale líšia sa amplitúdou, fázovým posunom
    - $x = A\cos(\omega t + \alpha_x)$
      $y = B\cos(\omega t + \alpha_y)$
  - z týchto rovníc potrebujeme vylúčiť časové členy (najprv cos, potom sin, výsledné rovnice umocníme a sčítame):
    - $\frac{x}{A} = \cos\omega t.\cos\alpha_x - \sin\omega t.\sin\alpha_x \;/.\cos\alpha_y$
      $\frac{y}{B} = \cos\omega t.\cos\alpha_y - \sin\omega t.\sin\alpha_y \;/.(-\cos\alpha_x)$
    - $\frac{x}{A}\cos\alpha_y = \cos\omega t.\cos\alpha_x \cos\alpha_y - \sin\omega t.\sin\alpha_x.\cos\alpha_y \rightarrow (1)$
      $-\frac{y}{B}\cos\alpha_x = -\cos\omega t.\cos\alpha_y \cos\alpha_x + \sin\omega t.\sin\alpha_y.\cos\alpha_x \rightarrow (2)$
  - rovnice (1) a (2) sčítame:
    - $\frac{x}{A}\cos\alpha_y - \frac{y}{B}\cos\alpha_x = \sin\omega t.\sin(\alpha_y - \alpha_x) \rightarrow (3)$
    - $\frac{x}{A} = \cos\omega t.\cos\alpha_x - \sin\omega t.\sin\alpha_x \;/.\sin\alpha_y$
      $\frac{y}{B} = \cos\omega t.\cos\alpha_y - \sin\omega t.\sin\alpha_y \;/.(-\sin\alpha_x)$
    - $\frac{x}{A}\sin\alpha_y = \cos\omega t.\cos\alpha_x \sin\alpha_y - \sin\omega t.\sin\alpha_x.\sin\alpha_y \rightarrow (4)$
      $-\frac{y}{B}\sin\alpha_x = -\cos\omega t.\cos\alpha_y \sin\alpha_x + \sin\omega t.\sin\alpha_y.\sin\alpha_x \rightarrow (5)$
  - rovnice (4) a (5) sčítame:
    - $\frac{x}{A}\sin\alpha_y - \frac{y}{B}\sin\alpha_x = \cos\omega t.\sin(\alpha_y - \alpha_x) \rightarrow (6)$
  - rovnice (3) a (6) umocníme:
    - $\frac{x^2}{A^2}\cos^2\alpha_y - 2\frac{x}{A}\frac{y}{B}\cos\alpha_x \cos\alpha_y + \frac{y^2}{B^2}\cos^2\alpha_x = \sin^2\omega t.\sin^2(\alpha_y - \alpha_x) \rightarrow (7)$
    - $\frac{x^2}{A^2}\sin^2\alpha_y - 2\frac{x}{A}\frac{y}{B}\sin\alpha_x \sin\alpha_y + \frac{y^2}{B^2}\sin^2\alpha_x = \cos^2\omega t.\sin^2(\alpha_y - \alpha_x) \rightarrow (8)$
  - rovnice (7) a (8) sčítame a dostaneme ***výslednú rovnicu trajektórie pohybu***:

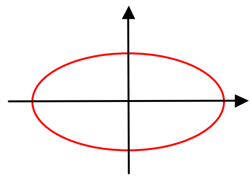
- $\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}-2\frac{x}{A}\frac{y}{B}\cos(\alpha_y-\alpha_x)=\sin^2(\alpha_y-\alpha_x)$

o podľa rozdielu fáz rozlišujeme rôzne prípady:

- $\alpha_y-\alpha_x=0$
  - $\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}-2\frac{x}{A}\frac{y}{B}=0\Rightarrow\left(\frac{x}{A}-\frac{y}{B}\right)^2=0\Rightarrow\frac{x}{A}=\frac{y}{B}\Rightarrow y=\frac{B}{A}x$



  - v tomto prípade výsledná trajektória má tvar úsečky
- $\alpha_y-\alpha_x=\pi$
  - $\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}+2\frac{x}{A}\frac{y}{B}=0\Rightarrow\left(\frac{x}{A}+\frac{y}{B}\right)^2=0\Rightarrow\frac{x}{A}=-\frac{y}{B}\Rightarrow y=-\frac{B}{A}x$
  - výsledná trajektória má tvar úsečky
- $\alpha_y-\alpha_x=\frac{\pi}{2}\vee\alpha_y-\alpha_x=\frac{3\pi}{2}$



  - $\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}=1$
  - výsledná trajektória má tvar elipsy
  - ak $\alpha_y-\alpha_x=\frac{\pi}{2}$,. výsledné kmity sú v smere hodinových ručičiek
  - ak $\alpha_y-\alpha_x=\frac{3\pi}{2}$, výsledný pohyb je proti smeru hodinových ručičiek