MO 32:

KOMBINATORIKA

- Daná je konečná neprázdna množina, ktorá má n prvkov, n∈ N. Z tejto množiny vyberáme skupinky prvkov a kladieme si otázku:
    - či sa prvky opakujú alebo neopakujú
    - či na poradí záleží alebo nezáleží

- ak záleží na poradí, hovoríme, že tvoríme usporiadané k-tice alebo n-tice

Variácie bez opakovania:

- máme danú množinu k∈ N, k<n
- ak vyberáme k-tice z n prvkov sú to variácie
- variácie k-tej triedy z n prvkov sú všetky usporiadané k-tice z množiny n
- $V(k,n) = \frac{n!}{(n-k)!}$
- alebo úlohy riešime pomocou súčinu

napr.
Máme číslivce 2,3,5,8. Urobte všetky 3ciferné čísla, pričom prvky sa neopakujú. (Záleží na poradí)

$$V(3,4) = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} = 24$$

4 prvky 3prvky 2prvky = 4.3.2 = 24

napr.
Máme číslice 0,1,2,5,7,8. Urobte všetky 4-ciferné čísla, pričom prvky sa neopakujú. (Záleží na poradí)

$$V(4,6) - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}\ V(4,6)$$

možnosť nuly na prvom mieste

5prvkov 5prvkov 4prvky 3prvky = 5.5.4.3 = 300

napr.
Urobte všetky štvorice, prvky sa neopakujú, čísla sú párne. Máme číslice: 0,1,2,5,7,8

→ končí na 0:

x x x 0
na prvom mieste nemôže byť 0
5 4 3 1
5.4.3.1 = 60

→ končí na 2:

$\underline{x}\ \underline{x}\ \underline{x}\ \underline{2}$
na prvom mieste nemôže byť 0, 2
$\underline{4}\ \underline{4}\ \underline{3}\ \underline{1}$
4.4.3.1 = 48

→ končí na 8:

$\underline{x}\ \underline{x}\ \underline{x}\ \underline{8}$
na prvom mieste nemôže byť 0, 8
$\underline{4}\ \underline{4}\ \underline{3}\ \underline{1}$
4.4.3.1 = 48

Spolu 156.

Permutácie bez opakovania:

- k = n
- vyberáme n-tice z n prvkov, usporiadané prvky
- P(n) = n!

napr.
Máme 20 žiakov. Usporiadajte ich do radu.

P(20) = 20!

Kombinácie bez opakovania

- ak vyberáme k-prvkové podmnožiny danej množiny, prvky sa neopakujú, na poradí nezáleží
- kombinácie k-tej triedy z n prvkov sú všetky k-prvkové podmnožiny množiny n
- $C(k,n) = \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$
- Variácií je k! viac ako kombinácií

napr.
Máme 20 žiakov. Na súťaž posielame 5 žiakov. (bez priradenia funkcie)

$C(5,20) = \binom{20}{5}$

Variácie s opakovaním

- prvky sa opakujú, záleží na poradí
- medzi k a n nie je vzťah
- tvoríme usporiadané k-tice z prvok množiny n, môžu sa opakovať
- $V`(k,n) = n^k$

napr.
Máme číslice:2,3,5,8. Utvorte všetky 3ciferné čísla. Číslice sa môžu opakovať.

$\underline{4}\ \underline{4}\ \underline{4} = 4^3$

Permutácie s opakovaním

- máme n prvkov, prvky sa vyskytujú p_1.,p_2., ..., p_n-krát; pričom platí $p_1 + p_2 + ... + p_n = n$
- $P`(p_1, p_2, ..., p_n) = \dfrac{n!}{p_1!p_2!...p_n!}$

napr.
MATEMATIKA. Určte počet všetkých slov, ktoré sa dajú urobiť zo všetkých písmen slova matematika.

A – 3; T – 2; M – 2; I – 1; E – 1; K – 1

$P`(3,2,2,1,1,1) = \dfrac{10!}{3!2!2!1!1!1!}$

Kombinácie s opakovaním

- vyberám podmnožiny, prvky sa môžu opakovať
- vzťah medzi k a n nie je
- $C`(k,n) = \binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}$

PRIEHRADKOVÝ SPÔSOB RIEŠENIA

napr.
7 jabĺk máme rozdeliť 4 deťom
o o | o| o o o | o
| | | o o o o o o o

$P`(3,7) = \dfrac{10!}{7!3!} = \binom{10}{3} = \binom{10}{7}$

$\downarrow$

7 = k = jablká
10 = n + k – 1
n = deti

Doplnkové kombinačné číslo

$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Kombinačné číslo

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

$$\binom{n}{0} = 1 = \frac{n!}{(n-0)!0!} = \frac{n!}{n!0!}$$

0! = 1
1! = 1

$$\binom{n}{1} = n$$

$\forall$ n,k$\in$ N;k<n:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$