MO 19:

LIMITA FUNKCIE A POSTUPNOSTI

Spojitá funkcia:

- Nech *f* je funkcia definovaná v nejakom okolí bodu *a*. Hovoríme, že funkcia *f* je spojitá v bode *a*, ak k ľubovoľnému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$, tak, že pre všetky *x* pre ktoré platí $|x-a| < \delta$, platí $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

- Spojitá funkcia **–** funkcia je spojitá v bode x_0 ak platí: $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Limita funkcie:

- Nech funkcia *f* je definovaná v nejakom rýdzom okolí bodu *a*. Hovoríme, že limita funkcie *f* v bode *a* sa rovná číslu *b*, ak pre každú konvergentnú postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ takú, že $a_n \in D(f) - \{a\}, a_n \to a$ platí, že postupnosť *f(a$_n$)* je tiež konvergentná a $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = b$. Vtedy píšeme $\lim_{x\to a} f(x) = b$.

- Limita funkcie *f* v bode *a* sa rovná číslu *b*, ak pre každé (ľubovoľne malé) číslo *ε>0* existuje také číslo *δ>0*, že pre všetky *x* z rýdzeho *δ* - okolia bodu a (t.j. z množiny $(a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$) je hodnota *f(x)* z ε - okolia bodu *b*, t.j. $|f(x) - b| < \varepsilon$.

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \text{ ; } \forall\ \varepsilon>0;\ \exists\delta>0;\ \forall\ x;|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon$$

- Funkcia *f* definovaná na intervale *(a-d, a)* má v bode *a* **limitu zľava**, ak pre každú postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ čísel z tohto intervalu, ktorá konverguje k *a* platí $f(a_n) \to b$. Vtedy píšeme $\lim_{n\to a^-} f(x) = b$.

- Funkcia *f* definovaná na intervale *(a, a+d)* má v bode *a* **limitu sprava**, ak pre každú postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ čísel z tohto intervalu, ktorá konverguje k *a* platí $f(a_n) \to b$. Vtedy píšeme $\lim_{n\to a^+} f(x) = b$.

- **Veta:** Funkcia *f* má v bode *a* limitu práve vtedy, keď má v tomto bode limitu zľava aj limitu sprava a tieto dve limity sa rovnajú.
- Uvedené definície a vety možno prirodzeným spôsobom rozšíriť aj na nevlastné limity.
- Tak napríklad funkcia $y = \frac{1}{x}$ má v bode *x=0* nevlastnú limitu, ktorá sa sprava rovná $+\infty$, pretože pre každú postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ takú, že $x_n \to 0$ a $x_n>0$ platí $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = +\infty$.

(**Limita postupnosti a funkcie** – nech f je funkcia definovaná v okolí bodu *a*, prípadne okrem bodu *a*, potom funkcia f má v bode *a* limitu L, ak k ľubovoľnému bodu L, □ okolie bodu *a* tak, že pre □ x Є okoliu *a*, x ≠ *a*, platí: f(x) Є okoliu L).

Nevlastná limita

- je limita v bodoch $\pm\ \infty$

Limita postupnosti:

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ práve vtedy, keď ku každému kladnému reálnemu číslu ε existuje také $n \in N$, že všetky členy danej postupnosti začínajúc členom a_n+1 patria do intervalu $(a\text{-}\varepsilon,\ a+\varepsilon)$.

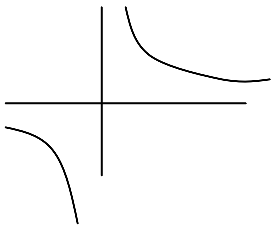
- Postupnosťou reálnych čísel rozumieme zobrazenie $f\colon N \to R$. Namiesto $f(n)$ zvyčajne píšeme a_n, postupnosť označujeme $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

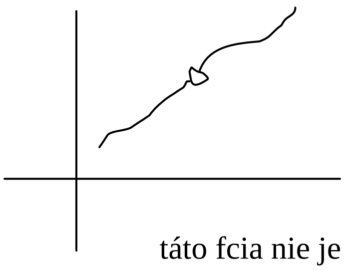
Konvergencia:

- Hovoríme, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ <u>konverguje</u> k číslu a, ak ku každému (ľubovoľnému malému) číslu $\varepsilon>0$ existuje také $n_0 \in N$, že pre každý člen postupnosti s indexom $n' \geq n_0$ platí $|a_n - a| < \varepsilon$. Vtedy píšeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ (alebo stručne $a_n \to a$).
- Postupnosť nazývame **konvergentnou**, ak má limitu, v opačnom prípade ju nazývame **ivergentnou**.

Príklady funkcií nespojitých v bode:

$y = \dfrac{1}{x}$





táto fcia nie je spojitá v bode a, ale má limitu v bode a, je to zabezpečené rýdzim okolím

Funkcia spojitá v bode, ale nemá limitu: