

MO 5: LINEÁRNE ROVNICE, NEROVNICE A SÚSTAVY

MO 5:

LINEÁRNE ROVNICE, NEROVNICE A SÚSTAVY

Rovnica – zapísaná rovnosť dvoch výrazov s aspoň jednou neznámou

- riešiť rovnicu znamená nájsť jej korene.

Lineárna rovnica s 1 neznámou x nazývame rovnicu tvaru $ax = b$; $a, b \in \mathbb{R}$

- $x = \frac{b}{a} \rightarrow$ koreň rovnice

$a = 0 \wedge b = 0$ $0x = 0$ $x \in \mathbb{R}$ rovnica má nekonečne veľa riešení	$a = 0 \wedge b \neq 0$ $P = \emptyset$ nemá riešenie	$a \neq 0 \wedge b \in \mathbb{R}$ $x = \frac{b}{a}$ $P = \left\{ \frac{b}{a} \right\}$
---	---	---

Lineárna rovnica s 2 neznámymi x, y nazývame rovnicu tvaru $ax + by = c$; $a, b, c \in \mathbb{R}$; $a, b \neq 0$

- táto rovnica má nekonečne veľa riešení v obore reálnych čísel
- pri znázornení v karteziánskej súradnicovej sústave vyplnia priamku (preto lineárna)
- keď rovnicu uvedeného typu riešime v obore celých čísel, hovoríme o diofantovskej rovnici \rightarrow NSD $(a, b) / c$

Lineárna nerovnica s 2 neznámymi x, y nazývame nerovnicu tvaru

$$ax + by > c$$

$$ax + by < c$$

$$ax + by \leq c$$

$$ax + by \geq c$$

- takáto nerovnica má v obore reálnych čísel nekonečne veľa riešení
- pri znázornení v karteziánskej súradnicovej sústave vyplnia polrovinu s hranicnou priamkou $ax + by = c$
- riešením je interval

Lineárna rovnica s n neznámymi x_1, x_2, \dots, x_n nazývame rovnicu tvaru

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b; a_i, b \in \mathbb{R}$$

V praxi sa však najčastejšie vyskytujú systavy takýchto rovníc. **Sústava** n lineárnych rovníc s n neznámymi má vo všeobecnosti tvar:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

...

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

Vyriešiť sústavu znamená nájsť všetky jej korene. Pričom **koreň** rovnice je číslo, ktoré keď dosadím do pôvodnej rovnice za neznámu, dostaneme pravdivý výrok.

MO 5: LINEÁRNE ROVNICE, NEROVNICE A SÚSTAVY

Pri riešení rovníc používame:

- **ekvivalentné úpravy:**
 - pripočítanie a odčítanie výrazu od oboch strán rovnice
 - vynásobenie a vydelenie oboch strán rovnice nenulovým výrazom
 - výmena strán rovnice
 - umocnenie a odmocnenie oboch strán rovnice, pokiaľ obe strany sú kladné čísla
- **neekvivalentné úpravy:**
 - musím robiť podmienky alebo skúšku

Metódy riešenia sústav rovníc:**Sčítacia metóda**

napr.

$$x - y = 7$$

$$\underline{x + 2y = 1}$$

$$-x + y = -7$$

$$\underline{x + 2y = 1}$$

$$-x + x + y + 2y = -7 + 1$$

$$3y = -6$$

$$y = -2 \rightarrow \text{dosadíme do niektorej pôvodnej rovnice} \Rightarrow x = 5$$

$$P = \{[5, -2]\}$$

napr.

$$3x + 4y = 2$$

$$\underline{-3x - 4y = -2}$$

$$0 = 0 \rightarrow \text{nekonečne veľa riešení} \Rightarrow \text{vyjadríme si } x: x = \frac{2 - 4y}{3} \Rightarrow P = \left\{ \left[\frac{2 - 4y}{3}; y \right]; y \in \mathbb{R} \right\}$$

Dosadzovacia metóda

Z jednej rovnice vyjadríme 1 neznámu a dosadíme do druhej.

Porovnávací metóda

Z rovníc vyjadríme rovnakú neznámu a dáme do rovnosti.

Gaussova – eliminačná (matice)

napr.

$$x - y = 7$$

$$\underline{x + 2y = 1}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 7 \\ 1 & 2 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 7 \\ 0 & 3 & -6 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

$$x = 5; y = -2$$

Musíme získať jednotky na ordinále a zvyšok 0.

MO 5: LINEÁRNE ROVNICE, NEROVNICE A SÚSTAVY**Determinanty**

napr.

$$x - y = 7$$

$$x + 2y = 1$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - (1 \cdot (-1)) = 3$$

1,2 ↘ hlavná uhlopriečka

-1,1 ↙ vedľajšia uhlopriečka

Súčin na hlavnej mínus súčin na vedľajšej.

$$D_x = \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7 \cdot 2 - ((-1) \cdot 1) = 15$$

Za x-ové hodnoty sme dosadili pravú stranu.

$$x = \frac{D_x}{D}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 7 \cdot 1 = -6$$

Za y-ové hodnoty sme dosadili pravú stranu.

$$y = \frac{D_y}{D}$$

$$\underline{D = 0}$$

- ∞ nekonečne veľa riešení
- \emptyset

$$D_x = D_y = 0$$

$$D_x \neq 0; D_y \neq 0$$

Grafická metóda

napr.

$$x - y = 7 \quad \rightarrow \text{urobíme priamku}$$

$$x + 2y = 1 \quad \rightarrow \text{urobíme priamku}$$

} kde sa pretnú, je riešenie

$$y = kx + q$$

$$y = x - 7$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

Absolútna hodnota

$$|x + 3| = 5 \quad |x - (-3)| = 5 \quad \rightarrow \text{vzdialenosť od bodu “-3” 5 jednotiek}$$

MO 5: LINEÁRNE ROVNICE, NEROVNICE A SÚSTAVY**Riešenie rovníc a nerovníc v súčinnom a podielovom tvare**

$$A(x) \cdot B(x) = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0 \vee B(x) = 0$$

$$A(x)/B(x) = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0 \wedge B(x) \neq 0$$

$$A(x) \cdot B(x) \geq 0 \Leftrightarrow (A(x) \geq 0 \wedge B(x) \geq 0) \vee (A(x) \leq 0 \wedge B(x) \leq 0)$$

$$A(x) \cdot B(x) \leq 0 \Leftrightarrow (A(x) \leq 0 \wedge B(x) \geq 0) \vee (A(x) \geq 0 \wedge B(x) \leq 0)$$

$$A(x)/B(x) \leq 0 \Leftrightarrow (A(x) \geq 0 \wedge B(x) < 0) \vee (A(x) \leq 0 \wedge B(x) > 0)$$

$$A(x)/B(x) \geq 0 \Leftrightarrow (A(x) \geq 0 \wedge B(x) > 0) \vee (A(x) \leq 0 \wedge B(x) < 0)$$

alebo metóda nulových bodov

Rovnice a nerovnice s parametrom