

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 2: ALGEBRA PRAVDIVOSTNÝCH HODNÔT VÝROKOV

1. príklad (24/Pr. 3)

Zadanie: Dokážte, že

a) výrok $(A \Rightarrow B')' \Rightarrow (B' \wedge A)'$ je tautológia.

b) výrok $\left[(A \vee B)' \Rightarrow (A \wedge B)' \right]'$ je kontradikcia.

Dôkaz (priamy):

$$\begin{aligned} \text{a) } \left[(A \Rightarrow B')' \Rightarrow (B' \wedge A)' \right] &\Leftrightarrow \left[(A \wedge B) \Rightarrow (B \vee A') \right] \Leftrightarrow \left[(A \wedge B)' \vee (A' \vee B) \right] \Leftrightarrow \left[(A' \vee B') \vee (A' \vee B) \right] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow A' \vee B \vee B' \end{aligned}$$

Posledný výrok je zrejme tautológiou, pretože jeden z výrokov B, B' je vždy pravdivý (bez ohľadu na pravdivostnú hodnotu výroku B)

$$\text{b) } \left[(A \vee B)' \Rightarrow (A \wedge B)' \right]' \Leftrightarrow \left[(A \vee B)' \wedge (A \wedge B) \right] \Leftrightarrow \left[(A' \wedge B') \wedge (A \wedge B) \right] \Leftrightarrow (A \wedge A' \wedge B \wedge B')$$

Posledný výrok je zrejme kontradikciou, pretože výroky A, A' (ani B, B') nemôžu byť súčasne pravdivé.

2. príklad (24/3)

Zadanie: Predpokladajme, že výrok P je pravdivý, výrok Q je nepravdivý a o pravdivostnej hodnote výroku R nemáme informácie. Rozhodnite, pre ktoré z nasledujúcich zložených výrokov možno určiť pravdivostnú hodnotu a určte ju.

a) $P \vee (Q \wedge R)$

b) $(P \wedge Q) \Rightarrow R$

c) $P \Rightarrow (Q \vee R)$

d) $(P \Leftrightarrow Q) \vee R$

e) $\left(P' \Rightarrow (Q \wedge R)' \right)'$

Riešenie:

Urobíme si tabuľku, v ktorej vyznačíme, akú pravdivostnú hodnotu budú mať dané výroky pri rôznych pravdivostných hodnotách výroku R :

P	Q	R	$P \vee (Q \wedge R)$	$(P \wedge Q) \Rightarrow R$	$P \Rightarrow (Q \vee R)$	$(P \Leftrightarrow Q) \vee R$	$\left(P' \Rightarrow (Q \wedge R)' \right)'$
1	0	0	1	1	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1	0

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 2: ALGEBRA PRAVDIVOSTNÝCH HODNÔT VÝROKOV

Zložené výroky a) a b) sú vždy pravdivé (nezávisle od pravdivostnej hodnoty výroku R). Zložený výrok e) je vždy nepravdivý. Pravdivostné hodnoty zložených výrokov c) a d) sa nedajú určiť bez znalosti pravdivostnej hodnoty výroku R.

3. príklad (26/13)

Zadanie: Vyjadrite všetky logické spojky iba pomocou konjunkcie a negácie.

Riešenie:

$$(A \vee B) \Leftrightarrow (A' \wedge B)'$$

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B)')' \Leftrightarrow (A \wedge B)'$$

$$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)) \Leftrightarrow ((A \wedge B')' \wedge (B \wedge A)')$$

4. príklad (26/15)

Zadanie: Vyjadrite všetky logické spojky iba pomocou implikácie a negácie.

Riešenie:

$$(A \wedge B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B)'$$

$$(A \vee B) \Leftrightarrow (A' \wedge B')' \Leftrightarrow [(A' \Rightarrow B)']' \Leftrightarrow (A' \Rightarrow B)$$

$$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (B \Rightarrow A))'$$

5. príklad (26/16)

Zadanie: Nájdite zložený výrok Z obsahujúci iba konjunkcie a negácie, ktorý je ekvivalentný s výrokom $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (B \vee C)$.

Riešenie:

Najprv si zapíšeme pravdivostné hodnoty výroku $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (B \vee C)$ v závislosti od pravdivostných hodnôt výrokov A, B, C:

A	B	C	$A \Rightarrow B$	$B \vee C$	$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (B \vee C)$
1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	0
1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	0	0

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 2: ALGEBRA PRAVDIVOSTNÝCH HODNÔT VÝROKOV

K výsledku sa dopracujeme postupne – najprv vytvoríme výrok pravdivý iba v prípade $P(A) = P(B) = P(C) = 0$. Takýmto výrokom je $(A' \wedge B' \wedge C')$. Zároveň musíme vytvoriť výrok, ktorý je pravdivý iba v prípade $P(B) = 0; P(A) = P(C) = 1$, a teda $(A \wedge B' \wedge C)$. Konjunkcia negácií týchto výrokov bude teda pravdivá vo všetkých prípadoch okrem spomínaných dvoch, a teda bude mať rovnaké pravdivostné hodnoty ako výrok $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (B \vee C)$. Výsledným výrokom je teda: $(A' \wedge B' \wedge C') \wedge (A \wedge B' \wedge C)$.