Autor: Martin Slota

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 29: ANALYTICKÁ GEOMETRIA

1. príklad (301/Pr. 2)

Zadanie: Určte vzdialenosť mimobežiek *p, q*, pričom:

$$p: \ x = 7 + t \qquad q: \ x = 3 - 7s$$
$$y = 3 + 2t \qquad y = 1 + 2s$$
$$z = 9 - t; t \in R \qquad z = 1 + 3s; s \in R$$

Riešenie:

$$\overrightarrow{\mathrm{u}_{\mathrm{p}}} = [1,2,-1]; \quad \overrightarrow{\mathrm{u}_{\mathrm{q}}} = [-7,2,3]$$

$$|\mathrm{XY}| = |pq|$$

Hľadáme body X, Y také, že $\mathrm{X} \in p \wedge \mathrm{Y} \in q \wedge \overleftrightarrow{\mathrm{XY}} \perp p \wedge \overleftrightarrow{\mathrm{XY}} \perp q$, takže

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{u}_{\mathrm{XY}}} \perp \overrightarrow{\mathrm{u}_{\mathrm{p}}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{u}_{\mathrm{XY}}} \perp \overrightarrow{\mathrm{u}_{\mathrm{q}}}\right) \Rightarrow \overrightarrow{\mathrm{u}_{\mathrm{XY}}} = k \cdot \left(\overrightarrow{\mathrm{u}_{\mathrm{p}}} \times \overrightarrow{\mathrm{u}_{\mathrm{q}}}\right) = k \cdot [8,4,16] = k \cdot [2,1,4] \quad (k \in R)$$

Pre smerový vektor $\overleftrightarrow{\mathrm{XY}}$ zároveň platí:

$$\overrightarrow{\mathrm{u}_{\mathrm{XY}}} = \overline{\mathrm{XY}} = [3 - 7s - 7 - t, 1 + 2s - 3 - 2t, 1 + 3s - 9 + t] = [-4 - 7s - t, -2 + 2s - 2t, -8 + 3s + t]$$

Teraz dostávame tri rovnice o troch neznámych:

$$-4 - 7s - t = 2k$$
$$-2 + 2s - 2t = k$$
$$\underline{-8 + 3s + t = 4k}$$
$$s = 0 = t; \quad k = -2$$

Do parametrických vyjadrení mimobežiek dosadíme hodnoty s a t a dostaneme body $\mathrm{X}[7,3,9]$ a $\mathrm{Y}[3,1,1]$.

$$\underline{\underline{|pq|}} = |\mathrm{XY}| = \sqrt{16 + 4 + 64} = \sqrt{84} = \underline{\underline{2\sqrt{21}}}$$

Vzdialenosť mimobežiek p, q je $2\sqrt{21}$.

2. príklad (303/1)

Zadanie: Je daná rovina $\alpha: 2x + 3y - z - 6 = 0$ a priamka $p: x = 1 - t,\ y = 2 + 2t,\ z = 4 + 3t,\ t \in R$.

a) Určte prienik priamky p a roviny α.
b) Napíšte parametrické vyjadrenie pravouhlého priemetu priamky p do roviny α.

Riešenie:

$$\overrightarrow{\mathrm{n}_{\alpha}} = [2,3,-1]$$
$$\overrightarrow{\mathrm{u}_{p}} = [-1,2,3]$$

a) $\overrightarrow{\mathrm{u}_{p}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{n}_{\alpha}} = 1 \neq 0 \Rightarrow p, \alpha$ nie sú rovnobežné $\Rightarrow p, \alpha$ sú rôznobežné

$\{\mathrm{P}\} = p \cap \alpha$

Súradnice P:

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 29: ANALYTICKÁ GEOMETRIA

$2(1-t)+3(2+2t)-(4+3t)-6=0$

$2-2t+6+6t-4-3t-6=0$

$\underline{t=2} \Rightarrow \underline{\underline{\mathrm{P}[-1,6,10]}}$

Prienik priamky p a roviny α je bod $\mathrm{P}[-1,6,10]$.

b) $\mathrm{A} \in p; \mathrm{A}[1,2,4]$

$$k \perp \alpha \wedge \mathrm{A} \in k \Rightarrow k: \begin{aligned} x &= 1+2s \\ y &= 2+3s \\ z &= 4-s; \quad s \in R \end{aligned}$$

$\{\mathrm{A_K}\} = k \cap \alpha$

Súradnice $\mathrm{A_K}$:

$2(1+2s)+3(2+3s)-(4-s)-6=0$

$2+4s+6+9s-4+s-6=0$

$\underline{s=\frac{1}{7}} \Rightarrow \underline{\mathrm{A_K}\left[\frac{9}{7},\frac{17}{7},\frac{27}{7}\right]}$

$$\overleftrightarrow{\mathrm{PA_K}}: \begin{aligned} x &= -1+\frac{16}{7}k \\ y &= 6-\frac{25}{7}k \\ z &= 10-\frac{43}{7}k; \quad k \in R \end{aligned} \qquad \overleftrightarrow{\mathrm{PA_K}}: \begin{aligned} x &= -1+16k \\ y &= 6-25k \\ z &= 10-43k; \quad k \in R \end{aligned}$$

Kolmý priemet priamky p do roviny α je priamka $\overleftrightarrow{\mathrm{PA_K}}$.

3. príklad (303/3)

Zadanie: Napíšte rovnicu priamky q, ktorá prechádza bodom $\mathrm{A}\left[5,\sqrt{3}\right]$ a zviera s priamkou $p: x+\sqrt{3}y-1=0$ uhol $\alpha = 60°$.

Riešenie:

$q: ax+by+c=0$

$$\cos 60° = \frac{1}{2} = \frac{\left|\vec{n}_q \cdot \vec{n}_p\right|}{\left|\vec{n}_q\right| \cdot \left|\vec{n}_p\right|} = \frac{\left|a+\sqrt{3}b\right|}{\sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{1+3}}$$

$$1 = \frac{\left|a+\sqrt{3}b\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\left|a+\sqrt{3}b\right| = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$a^2+2ab\sqrt{3}+3b^2 = a^2+b^2$$

$$2ab\sqrt{3}+2b^2 = 0$$

$$2b \cdot \left(a\sqrt{3}+b\right) = 0$$

$$\Downarrow$$

Autor: Martin Slota

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 29: ANALYTICKÁ GEOMETRIA

$$b = 0 \ \vee b = -a\sqrt{3}$$
$$\overrightarrow{n_q} = [a,0] \ \vee \overrightarrow{n_q} = [a,-a\sqrt{3}]$$
$$\overrightarrow{n_q} = [1,0] \ \vee \overrightarrow{n_q} = [1,-\sqrt{3}]$$
$$q: x + c = 0 \ \vee q: x - \sqrt{3}y + c = 0$$
$$A \in q: 5 + c = 0 \ \vee A \in q: 5 - 3 + c = 0$$
$$c = -5 \ \vee c = -2$$

Rovnice priamok q_1, q_2 prechádzajúcich bodom $A[5,\sqrt{3}]$ a zvierajúcich s priamkou $p: x + \sqrt{3}y - 1 = 0$ uhol $\alpha = 60°$ sú $q_1: x - 5 = 0$ a $q_2: x - \sqrt{3}y - 2 = 0$.

Autor: Martin Slota

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 29: ANALYTICKÁ GEOMETRIA

4. príklad (303/6)

Zadanie: Sú dané body $M[-2,3]$, $A[5,-1]$, $B[3,7]$. Nájdite všetky priamky, ktoré prechádzajú bodom M a majú od bodov A, B rovnakú vzdialenosť.

Riešenie:

$$p: ax+by+c=0$$
$$M \in p \Rightarrow -2a+3b+c=0 \Rightarrow c=2a-3b$$
$$|Ap|=|Bp| \Rightarrow \frac{|5a-b+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|3a+7b+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
$$|5a-b+2a-3b|=|3a+7b+2a-3b|$$
$$|7a-4b|=|5a+4b|$$
$$\Downarrow$$
$$2a=8b \vee 12a=0$$
$$\begin{matrix} a=4 \\ b=1 \end{matrix} \vee \begin{matrix} a=0 \\ b=1 \end{matrix}$$
$$p: 4x+y+c=0 \vee p: y+c=0$$
$$M \in p \Rightarrow \underline{\underline{p: 4x+y+5=0}} \vee M \in p \Rightarrow \underline{\underline{p: y-3=0}}$$

Priamky, ktoré prechádzajú bodom M a majú od bodov A, B rovnakú vzdialenosť sú: $p_1: 4x+y+5=0$ a $p_2: y-3=0$.

5. príklad (304/10)

Zadanie: Určte rovnice dvoch navzájom kolmých priamok, ktoré prechádzajú bodom $A[7,1]$ a od začiatku súradnej sústavy majú rovnakú vzdialenosť.

Riešenie:

$$p \perp q \Rightarrow p: ax+by+c=0,\ q: bx-ay+d=0$$
$$A \in p \Rightarrow 7a+b+c=0 \Rightarrow c=-7a-b$$
$$A \in q \Rightarrow 7b-a+d=0 \Rightarrow d=a-7b$$
$$|0p|=|0q| \Rightarrow \frac{|-7a-b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|a-7b|}{\sqrt{b^2+(-a)^2}} \Rightarrow |-7a-b|=|a-7b|$$
$$\Downarrow$$
$$7a+b=a-7b \vee 7a+b=7b-a$$
$$6a=-8b \vee 8a=6b$$
$$a=-\frac{4}{3}b \vee a=\frac{3}{4}b$$
$$\begin{matrix} p: 4x-3y+c=0 \\ q: -3x-4y+d=0 \end{matrix} \vee \begin{matrix} p: 3x+4y+c=0 \\ q: 4x-3y+d=0 \end{matrix}$$
$$\begin{matrix} q: 3x+4y+d=0 \\ p: 4x-3y+c=0 \end{matrix} \vee \begin{matrix} p: 3x+4y+c=0 \\ q: 4x-3y+d=0 \end{matrix}$$

Autor: Martin Slota

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 29: ANALYTICKÁ GEOMETRIA

$p: 3x + 4y + c = 0$, $q: 4x - 3y + d = 0$

$\mathrm{A} \in p \Rightarrow \underline{\underline{p: 3x + 4y - 25 = 0}}$

$\mathrm{A} \in q \Rightarrow \underline{\underline{q: 4x - 3y - 25 = 0}}$

Rovnice dvoch navzájom kolmých priamok, ktoré prechádzajú bodom $\mathrm{A}[7,1]$ a od začiatku súradnej sústavy majú rovnakú vzdialenosť sú $p: 3x + 4y - 25 = 0$ a $q: 4x - 3y - 25 = 0$.