

## MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

### **MATURITNÝ OKRUH 11: EXPONENCIÁLNE A LOGARITMICKÉ FUNKCIE**

#### **1. príklad (118/2 e)**

Zadanie: Riešte v  $R$  rovnicu  $a^{x-1} + ba^{x+1} = ab^{x-2} + a^3b^{x-1}$  ( $a, b \in R^+$ ).

Riešenie:

$$\begin{aligned}a^{x-1} + ba^{x+1} &= ab^{x-2} + a^3b^{x-1} \\ a^{x-1} \cdot (1 + ba^2) &= ab^{x-2} \cdot (1 + a^2b) \quad ((1 + a^2b) \neq 0) \\ a^{x-1} &= ab^{x-2} \\ \left(\frac{a}{b}\right)^{x-2} &= 1\end{aligned}$$

$$\underline{\underline{a = b \Rightarrow x \in R}}$$

$$\underline{\underline{a \neq b \Rightarrow x = 2}}$$

#### **2. príklad (118/5)**

Zadanie: Riešte v  $R \times R$  sústavu:

$$\begin{aligned}x^{y+1} &= 125 \\ \left(\frac{1}{x}\right)^{y-1} &= \frac{1}{5}\end{aligned}$$

Riešenie:

$$x^{y+1} = 125$$

$$\underline{\underline{\left(\frac{1}{x}\right)^{y-1} = \frac{1}{5}}}$$

$$x^{y+1} = 125$$

$$\underline{\underline{x^{y-1} = 5}}$$

$$\left. \begin{aligned}x^{y+1} &= 125 \\ x^{y+1} &= 5x^2\end{aligned} \right\} \Rightarrow 5x^2 = 125 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm 5$$

$$x = 5 \Rightarrow 5^{y-1} = 5 \Rightarrow y = 2 \left. \vphantom{x = 5} \right\} \Rightarrow K = \{[5, 2]\}$$
$$x = -5 \Rightarrow (-1)^{y-1} \cdot 5^{y-1} = 5 \Rightarrow (y = 2 \wedge y \text{ je nepárne}) \Rightarrow \cancel{y}$$

#### **3. príklad (119/13)**

Zadanie: Je daná funkcia  $f : y = \frac{10^x - 10^{-x}}{10^x + 10^{-x}} + 1$ . Dokážte, že  $f$  je prostá a určte k nej inverznú funkciu.

Riešenie:

## MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

### **MATURITNÝ OKRUH 11: EXPONENCIÁLNE A LOGARITMICKÉ FUNKCIE**

Najprv si funkciu upravíme:  $f : y = \frac{10^x - 10^{-x}}{10^x + 10^{-x}} + 1 = \frac{10^x - 10^{-x} + 10^x + 10^{-x}}{10^x + 10^{-x}} = \frac{2 \cdot 10^x}{10^x + 10^{-x}}$

Teraz sformulujeme tvrdenie, ktoré chceme dokázať:  $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}; (x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$ .

Dôkaz (sporom):

$$\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R}; (x_1 \neq x_2 \wedge f(x_1) = f(x_2)) \Rightarrow \frac{2 \cdot 10^{x_1}}{10^{x_1} + 10^{-x_1}} = \frac{2 \cdot 10^{x_2}}{10^{x_2} + 10^{-x_2}} \Rightarrow 10^{x_1+x_2} + 10^{x_1-x_2} =$$

$$= 10^{x_2+x_1} + 10^{x_2-x_1} \Rightarrow x_1 - x_2 = x_2 - x_1 \Rightarrow x_1 = x_2 \rightarrow \text{spor s predpokladom} \Rightarrow \text{funkcia je prostá ČBTD.}$$

Určenie predpisu inverznej funkcie:

$$f : y = \frac{2 \cdot 10^x}{10^x + 10^{-x}} \Rightarrow f^{-1} : x = \frac{2 \cdot 10^y}{10^y + 10^{-y}} \Rightarrow x \cdot 10^y + x \cdot 10^{-y} = 2 \cdot 10^y \Rightarrow x \cdot 10^{2y} + x = 2 \cdot 10^{2y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = (2 - x) \cdot 10^{2y} \Rightarrow \frac{x}{2 - x} = 10^{2y} \Rightarrow \log \frac{x}{2 - x} = 2y \Rightarrow f^{-1} : y = \frac{1}{2} \log \frac{x}{2 - x}$$

Ešte musíme určiť definičný obor inverznej funkcie:

$$\frac{x}{2 - x} > 0 \Rightarrow ((x > 0) \wedge (2 - x > 0)) \vee ((x < 0) \wedge (2 - x < 0)) \Rightarrow ((x > 0) \wedge (2 > x)) \vee ((x < 0) \wedge (2 < x)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x \in (0, 2)}}$$

#### **4. príklad (119/10)**

Zadanie: Nájdite  $\log_6 16$ , ak viete, že  $\log_{12} 27 = a$ .

Riešenie:

$$a = \log_{12} 27 = \log_{12} 3^3 = \frac{\log_3 3^3}{\log_3 12} = \frac{3}{\log_3 3 + \log_3 4} = \frac{3}{1 + 2 \cdot \log_3 2} \Rightarrow \log_3 2 = \frac{3 - a}{2a}$$

$$\underline{\underline{\log_6 16}} = 4 \cdot \log_6 2 = 4 \cdot \frac{\log_3 2}{\log_3 6} = 4 \cdot \frac{\log_3 2}{\log_3 3 + \log_3 2} = 4 \cdot \frac{\frac{3 - a}{2a}}{1 + \frac{3 - a}{2a}} = \frac{6 - 2a}{a + 3} = \frac{2a \cdot (6 - 2a)}{a \cdot (a + 3)} = \underline{\underline{\frac{4 \cdot (3 - a)}{a + 3}}}$$

#### **5. príklad (119/17)**

Zadanie: Riešte v  $\mathbb{R}$  rovnicu  $\log_3 \log_8 \log_2 (x + 9) = \log_3 2 - 1$ .

Riešenie:

## **MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY**

### ***MATURITNÝ OKRUH 11: EXPONENCIÁLNE A LOGARITMICKÉ FUNKCIE***

$$\log_3 \log_8 \log_2(x+9) = \log_3 2 - 1$$

$$\log_3 \log_8 \log_2(x+9) = \log_3 2 - \log_3 3$$

$$\log_3 \log_8 \log_2(x+9) = \log_3 \frac{2}{3}$$

$$\log_8 \log_2(x+9) = \frac{2}{3}$$

$$\log_8 \log_2(x+9) = \log_8 8^{\frac{2}{3}}$$

$$\log_2(x+9) = 4$$

$$\log_2(x+9) = \log_2 2^4$$

$$x+9 = 16$$

$$x = 7$$

$$\underline{\underline{K = \{7\}}}$$