Autor: Martin Slota

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 9: FUNKCIE

1. príklad (103/3)

Zadanie: Určte intervaly monotónnosti a obor funkčných hodnôt funkcie $f: y = e^{\frac{-x^2}{2}}$.

Riešenie:

$$f'(x) = -2\frac{x}{2}e^{\frac{-x^2}{2}} = -x \cdot e^{\frac{-x^2}{2}}$$

Keďže $e^{\frac{-x^2}{2}}$ je vždy kladné, funkcia f je rastúca, keď je $x < 0$ (vtedy je $-x > 0$ a f' je teda kladná), a klesajúca, keď je $x > 0$ (vtedy je $-x < 0$ a f' je teda záporná).

Funkcia f je rastúca na intervale $(-\infty, 0\rangle$ a klesajúca na intervale $\langle 0, \infty)$.

Funkcia f má lokálne (aj globálne) maximum v bode $[0,1]$. Preto jej funkčná hodnota nestúpa nad bod 1 a neklesá pod bod 0, pretože $e^{\frac{-x^2}{2}} > 0$.

Obor funkčných hodnôt funkcie f je teda $H(f) = (0,1\rangle$.

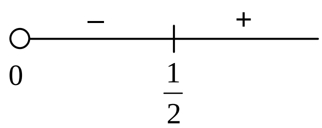
2. príklad (103/8)

Zadanie: Nájdite intervaly monotónnosti funkcie $f: y = 2x^2 - \ln x$.

Riešenie:

$$D(f) = R^+$$

$$f'(x) = 4x - \frac{1}{x} = \frac{4x^2 - 1}{x} = \frac{(2x-1)\cdot(2x+1)}{x}$$



Keďže berieme do úvahy iba kladné hodnoty, je funkcia rastúca na intervale $\left\langle \frac{1}{2}, \infty \right)$ a klesajúca na intervale $\left(0, \frac{1}{2}\right\rangle$.

3. príklad (103/10)

Zadanie: Je daná funkcia $f: y = (x-2)^2 \cdot |x-5|$. Na základe grafu f rozhodnite, pre ktoré reálne p má rovnica $(x-2)^2 \cdot |x-5| = p$ práve štyri korene.

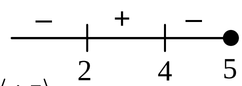
Riešenie:

Nulové body má funkcia f v bodoch 2 a 5.

$x \in (-\infty, 5\rangle$:

$$f: y = (x^2 - 4x + 4)\cdot(5-x) = 5x^2 - 20x + 20 - x^3 + 4x^2 - 4x = -x^3 + 9x^2 - 24x + 20$$

$$f'(x) = -3x^2 + 18x - 24 = -3\cdot(x^2 - 6x + 8) = -3\cdot(x-4)\cdot(x-2)$$



Funkcia f je rastúca na intervale $\langle 2,4\rangle$ a klesajúca na intervaloch $(-\infty, 2\rangle$ a $\langle 4,5\rangle$.

Autor: Martin Slota

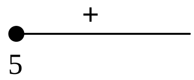
MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 9: FUNKCIE

$x \in \langle 5, \infty)$:

$f: y = (x^2 - 4x + 4) \cdot (x-5) = x^3 - 4x^2 + 4x - 5x^2 + 20x - 20 = x^3 - 9x^2 + 24x - 20$

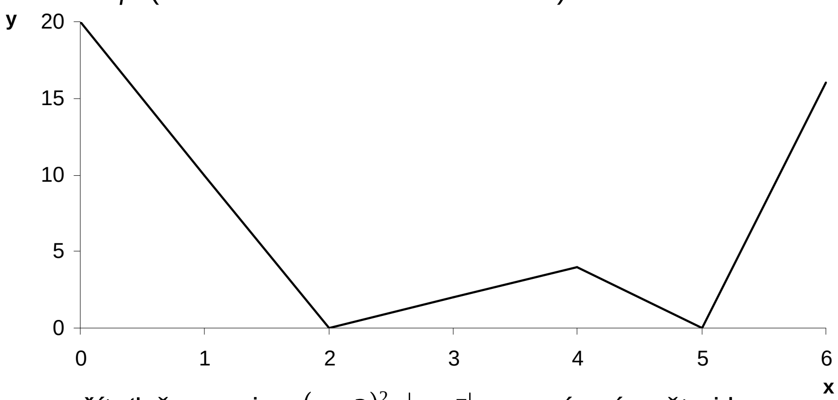
$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24 = 3 \cdot (x^2 - 6x + 8) = 3 \cdot (x-4) \cdot (x-2)$



Funkcia f je rastúca na intervale $\langle 5, \infty)$.

Funkcia f má v bodoch $[2,0]$ a $[5,0]$ lokálne minimá a v bode $[4,4]$ lokálne maximum.

Približný graf funkcie f (bez konvexnosti a konkávnosti):

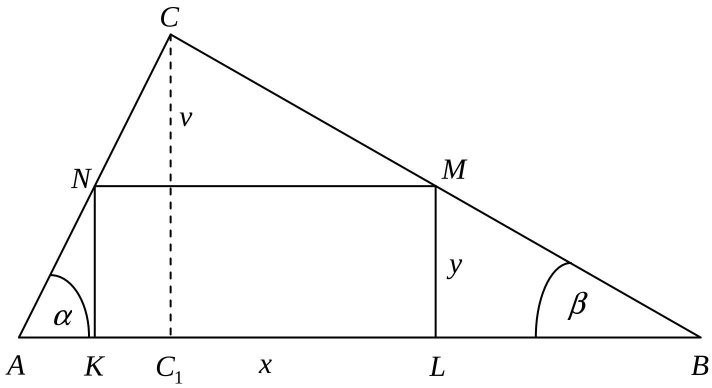


Z grafu môžeme vyčítať, že rovnica $(x-2)^2 \cdot |x-5| = p$ má práve štyri korene pre $p \in (0,4)$.

4. príklad (103/11)

Zadanie: Z trojuholníka, ktorého základňa je c, výška na základňu je v a uhly pri základni sú ostré, má byť vystrihnutý obdĺžnik, pričom jedna strana obdĺžnika je časťou základne. Určte rozmery obdĺžnika tak, aby mal maximálny obsah.

Riešenie:



Rozmery obdĺžnika: $|KL| = x$, $|LM| = y$

$|AB| = \underline{c} = |AC_1| + |BC_1| = v \cdot \cot \alpha + v \cdot \cot \beta = \underline{v \cdot (\cot \alpha + \cot \beta)}$

$|AB| = \underline{c} = |AK| + |KL| + |LB| = y \cdot \cot \alpha + x + y \cdot \cot \beta = x + y \cdot (\cot \alpha + \cot \beta) = \underline{x + y\frac{c}{v}} \Rightarrow \underline{x = c - y\frac{c}{v}}$

$S = xy = cy - \frac{c}{v}y^2 \qquad y \in (0, v)$

$S'(y) = c - 2\frac{c}{v}y$

$S'(y) = 0 \Leftrightarrow y = \frac{v}{2}$

Autor: Martin Slota

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 9: FUNKCIE

$S''(y) = -2\frac{c}{v} < 0 \Rightarrow$ v bode $\underline{\underline{y = \frac{v}{2}}}$ je lokálne (a na danom intervale aj globálne) maximum.

$\underline{\underline{x}} = c - \frac{c}{v}\frac{v}{2} = \underline{\underline{\frac{c}{2}}}$

Rozmery obdĺžnika s najväčším obsahom vystrihnutého z trojuholníka sú $\frac{c}{2}$ a $\frac{v}{2}$.

5. príklad (104/18)

Zadanie: Nájdite body nespojitosti funkcie $f: y = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 3x + 2}$ a pokúste sa dodefinovať v týchto bodoch funkciu f tak, aby v nich bola spojitá.

Riešenie:

$$f: y = \frac{(x-2)\cdot(x+1)}{(x-2)\cdot(x-1)}$$

Body nespojitosti funkcie f: 2 a 1.

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\frac{x+1}{x-1} = 3$$

$2 \notin D(f) \wedge \exists \lim_{x\to 2} f(x) \Rightarrow 2$ je odstrániteľný bod nespojitosti funkcie f a funkčnú hodnotu v bode 2 by sme mohli dodefinovať hodnotou 3.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\frac{x+1}{x-1} = \infty \\ \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\frac{x+1}{x-1} = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 1} f(x) \Rightarrow$$ bod 1 nie je odstrániteľným bodom nespojitosti funkcie f.