MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 12: GONIOMETRICKÉ FUNKCIE

1. príklad (129/7)

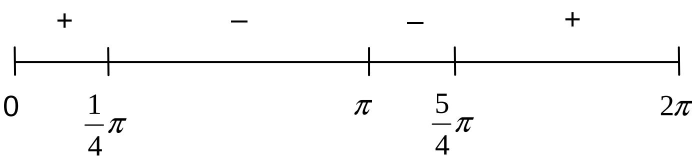
Zadanie: Vyšetrite priebeh funkcie $f: y = \sin x + \cos x$ na intervale $\langle 0, 2\pi \rangle$. Načrtnite jej graf.

Riešenie:

1. nulové body: $\sin x + \cos x = 0 \Rightarrow \sin x = -\cos x \Rightarrow x = \frac{3}{4}\pi \vee x = \frac{7}{4}\pi$
2. prvá derivácia:

   $f'(x) = \cos x - \sin x$

   $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = \sin x \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}\pi \vee x = \frac{5}{4}\pi$

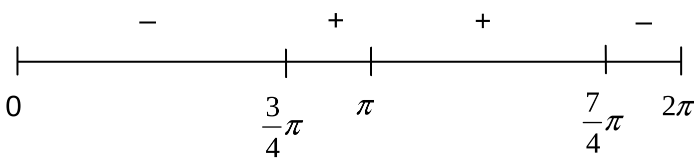
   

   klesajúca na $\left\langle \frac{1}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi \right\rangle$, rastúca na $\left\langle 0, \frac{1}{4}\pi \right\rangle$ a na $\left\langle \frac{5}{4}\pi, 2\pi \right\rangle$

   lokálne maximum: $\left[\frac{1}{4}\pi, \sqrt{2} \right]$, lokálne minimum: $\left[\frac{5}{4}\pi, -\sqrt{2} \right]$
3. druhá derivácia:

   $f''(x) = -\sin x - \cos x$

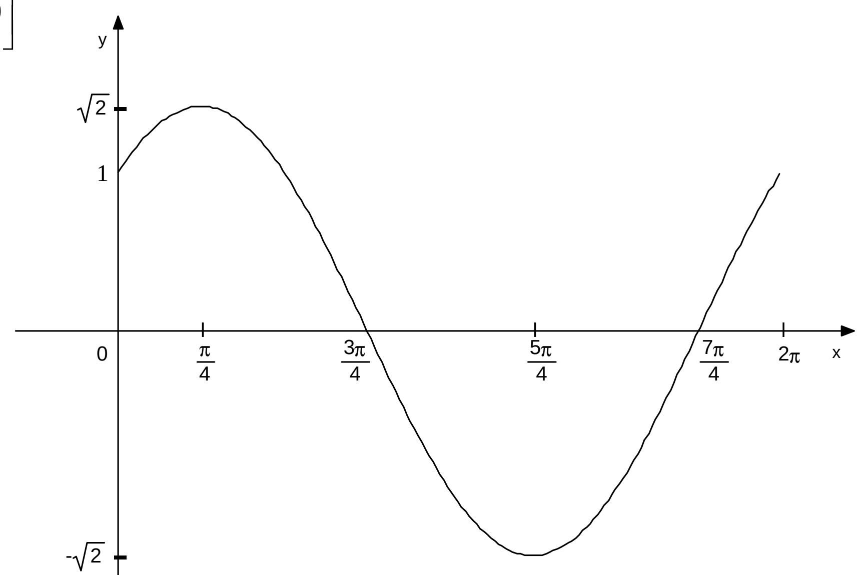
   $f''(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = -\cos x \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}\pi \vee x = \frac{7}{4}\pi$

   konvexná na $\left\langle \frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi \right\rangle$, konkávna na $\left\langle 0, \frac{3}{4}\pi \right\rangle$ a na $\left\langle \frac{7}{4}\pi, 2\pi \right\rangle$

   inflexné body: $\left[\frac{3}{4}\pi, 0 \right], \left[\frac{7}{4}\pi, 0 \right]$
4. graf:

   $H(f) = \left\langle -\sqrt{2}, \sqrt{2} \right\rangle$



Autor: Martin Slota

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 12: GONIOMETRICKÉ FUNKCIE

2. príklad (130/13 e) + 14 e))

Zadanie: Na intervale $\langle 0, 2\pi \rangle$ riešte:

a) $\cos v + \sin 2v = 0$

b) $\mathrm{tg}^2 x + 4\sin^2 x - 3 = 0$

Riešenie:

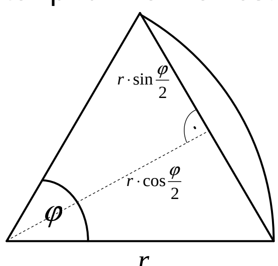
a)
$$\cos v + \sin 2v = 0$$
$$\cos v + 2\sin v \cos v = 0$$
$$\cos v \cdot (1 + 2\sin v) = 0$$
$$\cos v = 0 \vee \sin v = -\frac{1}{2}$$
$$\left(v = \frac{\pi}{2} \vee v = \frac{3\pi}{2}\right) \vee \left(v = \frac{7\pi}{6} \vee v = \frac{11\pi}{6}\right)$$
$$\underline{\underline{K = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}}}$$

b)
$$\mathrm{tg}^2 x + 4\sin^2 x - 3 = 0$$
$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 4\sin^2 x - 3 = 0$$
$$\frac{\sin^2 x + 4\sin^2 x \cdot (1 - \sin^2 x) - 3 \cdot (1 - \sin^2 x)}{1 - \sin^2 x} = 0$$
$$-4\sin^4 x + 8\sin^2 x - 3 = 0$$
$$4\sin^4 x - 8\sin^2 x + 3 = 0$$
$$\sin^2 x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{8} = \frac{8 \pm 4}{8} = 1 \pm \frac{1}{2}$$
$$\left(\sin^2 x \in \langle 0,1 \rangle \wedge \sin^2 x = 1 \pm \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \underline{\underline{K = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}}}$$

3. príklad (130/10)

Zadanie: Kruhový výsek má dvojnásobný obsah ako príslušný odsek. Určte približne veľkosť stredového uhla.

Riešenie:



Autor: Martin Slota

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 12: GONIOMETRICKÉ FUNKCIE

$$S_{\text{vys}} = 2S_{\text{ods}}$$

$$\frac{\pi r^2}{2\pi}\cdot\varphi = 2\cdot\left(S_{\text{vys}} - S_{\Delta}\right)$$

$$\frac{r^2\varphi}{2} = 2\cdot\left(\frac{r^2\varphi}{2} - r\cdot\sin\frac{\varphi}{2}\cdot r\cdot\cos\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$\frac{\varphi}{2} = \varphi - 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}$$

$$\frac{\varphi}{2} = \varphi - \sin\varphi$$

$$\underline{\underline{\varphi = 2\sin\varphi}}$$

Približnú hodnotu stredového uhla φ by sme teraz dopočítali iteračnou metódou, a to takto:

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2}\ (\text{napr.})$$
$$\varphi_2 = 2\sin\varphi_1$$
$$\varphi_3 = 2\sin\varphi_2$$
$$\varphi_4 = 2\sin\varphi_3$$
$$\vdots$$

pozn.: Keby ste to náhodou mali niekde dopočítavať (napr. na maturite), nezabudnite kalkulačku prestaviť na radiány, alebo to celé počítajte v stupňoch; približný výsledok je $\varphi = 1{,}895\,\text{rad}$.

4. príklad (131/17)

Zadanie: Dokážte, že v každom trojuholníku ABC platí $\operatorname{cotg}\gamma = \frac{b}{c\cdot\sin\alpha} - \operatorname{cotg}\alpha$.

Dôkaz (priamy):

využívame sínusovú vetu

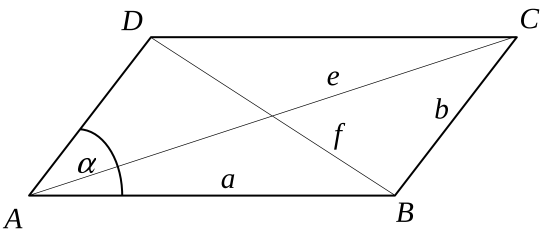
Nech ΔABC má vnútorné uhly $\alpha,\beta,\gamma \Rightarrow \underline{\operatorname{cotg}\gamma - \frac{b}{c\cdot\sin\alpha} + \operatorname{cotg}\alpha} = \frac{\cos\gamma}{\sin\gamma} - \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}\cdot\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} =$

$$= \frac{\cos\gamma\cdot\sin\alpha - \sin\beta + \cos\alpha\cdot\sin\gamma}{\sin\gamma\cdot\sin\alpha} = \frac{\sin(\alpha+\gamma) - \sin\beta}{\sin\gamma\cdot\sin\alpha} = \frac{\sin(180^\circ - \beta) - \sin\beta}{\sin\gamma\cdot\sin\alpha} \underline{= 0} \Rightarrow \underline{\underline{\operatorname{cotg}\gamma = \frac{b}{c\cdot\sin\alpha} - \operatorname{cotg}\alpha}}$$

ČBTD.

5. príklad (130/15)

Zadanie: Dokážte, že v rovnobežníku s dĺžkami strán a,b, dĺžkami uhlopriečok e,f a veľkosťou vnútorného uhla α platí:



a) $e^2 + f^2 = 2\cdot\left(a^2 + b^2\right)$

b) $e^2 - f^2 = 4ab\cos\alpha$

Dôkaz (priamy):

Kosínové vety v $\Delta ABD, \Delta ABC$:

$$\left.\begin{aligned} f^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha \\ e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(180^\circ - \alpha) &= a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} e^2 + f^2 &= 2\left(a^2 + b^2\right) \\ e^2 - f^2 &= 4ab\cos\alpha \end{aligned}\right.$$

ČBTD.

6. príklad (129/4)

Zadanie: Nech $a = \sin 5^\circ\cdot\sin 15^\circ\cdot\sin 25^\circ\cdot\sin 35^\circ\cdot\sin 55^\circ\cdot\sin 65^\circ\cdot\sin 75^\circ$. Dokážte, že $a \in Q$.

Dôkaz (priamy):

Autor: Martin Slota

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 12: GONIOMETRICKÉ FUNKCIE

$$a = \sin 5° \cdot \sin 15° \cdot \sin 25° \cdot \sin 35° \cdot \sin 55° \cdot \sin 65° \cdot \sin 75° \cdot \sin 85° \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \sin 5° \cdot \sin 15° \cdot \sin 25° \cdot \sin 35° \cdot \cos 35° \cdot \cos 25° \cdot \cos 15° \cdot \cos 5° \Rightarrow$$

využívame $\sin x \cdot \cos x = \dfrac{\sin 2x}{2}$

$$\Rightarrow a = \frac{\sin 10°}{2} \cdot \frac{\sin 30°}{2} \cdot \frac{\sin 50°}{2} \cdot \frac{\sin 70°}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \sin 10° \cdot \sin 50° \cdot \sin 70° \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \frac{\sin 10° \cdot \cos 10° \cdot \cos 40° \cdot \cos 20°}{\cos 10°} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot \frac{\sin 20° \cdot \cos 40° \cdot \cos 20°}{\cos 10°} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \left(\frac{1}{2}\right)^7 \cdot \frac{\sin 40° \cdot \cos 40°}{\sin 80°} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \left(\frac{1}{2}\right)^8 \cdot \frac{\sin 80°}{\sin 80°} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{a = \left(\frac{1}{2}\right)^8} \Rightarrow \underline{\underline{a \in Q}}$$