Autor: Martin Slota

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 16: KOMBINATORIKA

1. príklad (177/Pr. 2)

Zadanie: Dokážte identitu $1\cdot\binom{n}{1}+2\cdot\binom{n}{2}+\ldots+(n-1)\cdot\binom{n}{n-1}+n\cdot\binom{n}{n}=n\cdot 2^{n-1}$

a) úpravou jednotlivých členov ľavej strany.

b) kombinatorickou úvahou.

Riešenie:

a) Dôkaz (priamy):

Priamo z definície kombinačného čísla dostávame:

$$1\cdot\binom{n}{1}+2\cdot\binom{n}{2}+\ldots+(n-1)\cdot\binom{n}{n-1}+n\cdot\binom{n}{n}=\sum_{i=1}^{n} i\cdot\binom{n}{i}=\frac{1\cdot n!}{(n-1)!1!}+\frac{2\cdot n!}{(n-2)!2!}+\ldots+\frac{(n-1)\cdot n!}{1!(n-1)!}+\frac{n\cdot n!}{0!n!}=$$

$$=\frac{n!}{(n-1)!}+\frac{n!}{(n-2)!1!}+\ldots+\frac{n!}{1!(n-2)!}+\frac{n!}{0!(n-1)!}=n\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(n-i)!(i-1)!}=n\cdot\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}=\underline{\underline{n\cdot 2^{n-1}}}\quad \text{ČBTD}$$

b) Dôkaz (priamy):

Predstavme si, že by sme vypísali zoznam všetkých 2^n-1 neprázdnych podmnožín množiny $A=\{1,2,\ldots,n\}$. Koľko čísel by sme pritom napísali? Je zrejmé, že každé z čísel $1,2,\ldots,n$ sme napísali rovnako veľakrát, a to presne toľkokrát, v koľkých podmnožinách sa vyskytuje. ich počet môžeme zistiť nasledujúcou úvahou: Každú podmnožinu množiny A obsahujúcu prvok k môžeme zapísať v tvare $\{k\}\cup A_k$, kde A_k je ľubovoľná podmnožina $(n-1)$–prvkovej množiny $A-\{k\}$. Týchto podmnožín je 2^{n-1}, teda každé číslo $k\in A$ napíšeme 2^{n-1} – krát. Keďže čísel je spolu n, je celkový počet napísaných čísel $n\cdot 2^{n-1}$.

Teraz si predstavme, že by sme zoznam podmnožín množiny A robili systematicky – podľa počtu prvkov. Najskôr vypíšeme všetky 1-prvkové podmnožiny. Tých je $\binom{n}{1}$ a každá obsahuje jedno číslo. Potom vypíšeme všetky dvojprvkové podmnožiny – tých je $\binom{n}{2}$ a každá obsahuje dve čísla, teda pritom zapíšeme $2\cdot\binom{n}{2}$ čísel atď. Spolu týmto postupom napíšeme $1\cdot\binom{n}{1}+2\cdot\binom{n}{2}+\ldots+(n-1)\cdot\binom{n}{n-1}+n\cdot\binom{n}{n}$ čísel.

Keďže obe správne úvahy musia viesť k rovnakému výsledku, je správnosť danej identity dokázaná.

2. príklad (179/Pr. 3)

Zadanie: Koľko je všetkých štvorciferných čísel neobsahujúcich nulu, v ktorých dekadickom zápise platí, že súčet prvých dvoch cifier sa rovná súčtu druhých dvoch cifier?

Riešenie:

Autor: Martin Slota

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 16: KOMBINATORIKA

Označme M množinu všetkých čísel požadovaných vlastností, M_i nech je množina štvorciferných prirodzených čísel, v ktorých sa súčet prvých dvoch aj druhých dvoch cifier rovná i. Potom platí $M = M_2 \cup M_3 \cup \ldots \cup M_{18}$, pričom $M_i \cap M_j = \theta$ pre $i \neq j$. Vyčíslime teda $|M_i|$ pre $i = 2,3,\ldots,18$ a použijeme pravidlo súčtu.

Nech $k \in M_i$ pre $i \leq 10$. Pre prvé dve cifry čísla k máme možnosti $[1, i-1], [2, i-2], \ldots, [i-1, 1]$, spolu $i-1$ možností. Pre druhé dve cifry čísla k máme tých istých $i-1$ možností, pričom voľba druhej dvojice je nezávislá od voľby prvých dvoch cifier. Podľa pravidla súčinu teda $|M_i| = (i-1)^2$.

Nech teraz $k \in M_i$ pre $i \geq 11$. Potom pre prvé dve cifry čísla k máme možnosti $[9, i-9], [8, i-8], \ldots, [i-9, 9]$, spolu $19 - i$ možností, teda pre $i \geq 11$ platí $|M_i| = (19-i)^2$.

Podľa pravidla súčtu potom dostávame $|M| = 1^2 + 2^2 + \ldots + 8^2 + 9^2 + 8^2 + \ldots + 2^2 + 1^2 = 489$. Čísel požadovaných vlastností je teda 489.

3. príklad (180/5)

Zadanie: Nech $A_1, A_1, \ldots, A_{12}$ sú vrcholy pravidelného 12-uholníka. Koľko existuje

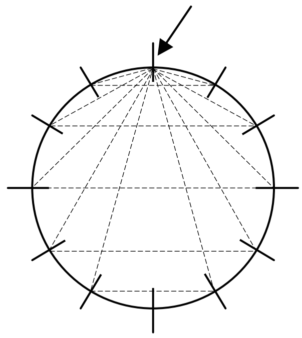
a) rovnoramenných

b) pravouhlých

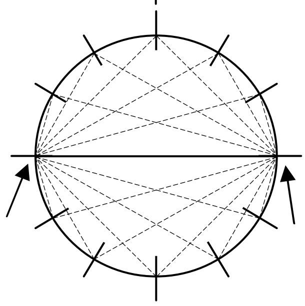
c) tupouhlých

trojuholníkov s vrcholmi v týchto dvanástich bodoch?

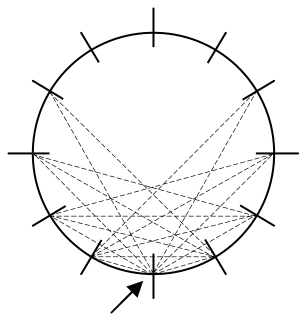
Riešenie:



a) Ku každému z dvanástich vrcholov vieme dokresliť práve 5 rovnoramenných trojuholníkov s vrcholmi v niektorých z ostatných z dvanástich vrcholov (pozri obr.). Z každého z dvanástich vrcholov však zostrojíme aj jeden rovnostranný trojuholník, ktorý tým pádom zarátame z každého jeho vrcholu raz – čiže dohromady trikrát. Preto ho musíme zároveň dvakrát odrátať. Rovnoramenných trojuholníkov je teda P(vrcholov)*P(trojuholníkov prislúchajúcich jednému vrcholu) – 2*P(rovnostranných trojuholníkov) = $5 \cdot 12 - 4 \cdot 2 = \underline{\underline{52}}$.



b) Pokiaľ si zoberieme jeden z priemerov kružnice dvanásťuholníku opísanej, všetky trojuholníky vytvorené s niektorým z ďalších vrcholov budú pravouhlé (Tálesova kružnica; pozri obr.). Každému priemeru prislúcha teda 10 trojuholníkov a priemerov je 6, čiže dohromady bude pravouhlých trojuholníkov $10 \cdot 6 = \underline{\underline{60}}$.



c) Tupouhlých trojuholníkov vieme ku každému z vrcholov zostrojiť 10, a preto je ich celkový počet $10 \cdot 12 = \underline{\underline{120}}$.

Autor: Martin Slota

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 16: KOMBINATORIKA

4. príklad (181/9)

Zadanie: Na orientačný beh sa prihlásilo n pretekárov, medzi nimi aj Adamec, Behúň a Cerový. Pretekári vybiehajú na trať jednotlivo, v pevných intervaloch. Určte, koľkými spôsobmi možno zostaviť rozvrh štartov tak, aby žiadni dvaja z menovaných pretekárov neštartovali bezprostredne po sebe.

Riešenie:

P (žiadni dvaja neštartujú po sebe) = P (všetkých štartovacích rozvrhov) – P (niektorí dvaja štartujú v ľubovoľnom poradí po sebe) + P (všetci traja štartujú v ľubovoľnom poradí po sebe) = $n! - 2!\cdot\binom{3}{2}\cdot(n-1)! + 3!\cdot(n-2)! = \underline{\underline{n! - 6\cdot(n-1)! + 6\cdot(n-2)!}}$.

5. príklad (181/11)

Zadanie: Koľkými spôsobmi možno číslo 10^6 rozložiť na súčin troch prirodzených činiteľov, ak berieme do úvahy aj ich poradie?

Riešenie:

Keďže $10^6 = 2^6 \cdot 5^6 \Rightarrow$ všetky hľadané čísla budú v tvare $2^i \cdot 5^j$ $(i, j \in \{0,1,2,\ldots,6\})$. Pri vytváraní trojíc činiteľov, ktorých súčinom je 10^6, v podstate rozdelíme šesť dvojok a nezávisle na tomto rozdelení aj šesť pätiek medzi hľadané činitele. Počet rôznych trojíc činiteľov sa teda bude rovnať počtu rôznych rozdelení dvojok znásobenému počtom rôznych rozdelení pätiek medzi činitele.

Predstavme si teraz, že máme dve prepážky rozdeľujúce jednotlivé činitele a šesť dvojok, ktoré medzi alebo za tieto prepážky dávame. Tým pádom v podstate máme osem „vecí“, ktoré sa snažíme usporiadať v ľubovoľnom poradí. Zároveň je nám však jedno, ktorá dvojka bude kde a tiež ktorá prepážka bude kde. Počet rôznych rozdelení dvojok bude teda zodpovedať číslu $\frac{8!}{2!\cdot 6!} = 28$.

Správne matematicky povedané sme vypočítali permutácie s opakovaním prvkov dvoch druhov, pričom počet prvkov jedného druhu je 6 a počet prvkov druhého druhu je 2. Zápis: $P(6,2)$.

Výpočet počtu rôznych rozdelení pätiek je úplne rovnaký až na to, že namiesto dvojok rozdeľujeme medzi činitele päťky.

Celkový počet výberu trojice činiteľov je teda $28\cdot 28 = \underline{\underline{784}}$.