

## MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

### *MATURITNÝ OKRUH 18: KOMPLEXNÉ ČÍSLA*

#### 1. príklad (199/Pr. 3)

Zadanie: Určte, aké zobrazenie dostaneme zložením otočenia okolo stredu  $[-2,2]$  o  $90^\circ$  a posunutia o vektor  $[1,1]$  v tomto poradí.

Riešenie:

$$\begin{aligned} & R_{[-2,2],90^\circ} \circ T_{[1,1]} \\ w &= [(z + 2 - 2i) \cdot (\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ) - 2 + 2i] + 1 + i \\ w &= zi + 2i - 2i^2 - 2 + 2i + 1 + i \\ w &= zi + 2i + 2i + 1 + i \\ w &= zi + 1 + 5i \Rightarrow R_{?,90^\circ} \\ w &= [z - (a + bi)] \cdot (\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ) + a + bi \\ w &= zi - ai - bi^2 + a + bi \\ w &= zi + (a + b) + (b - a)i \end{aligned}$$

Dostávame dve rovnice o dvoch neznámych:

$$a + b = 1$$

$$b - a = 5$$

$$a = -2$$

$$b = 3$$

$$R_{[-2,2],90^\circ} \circ T_{[1,1]} = R_{[-2,3],90^\circ}$$

Zložením daných zobrazení v uvedenom poradí získame otočenie o  $90^\circ$  so stredom v bode, ktorý je obrazom komplexného čísla  $[-2,3]$ .

#### 2. príklad (201/4)

Zadanie: Rozložte na súčin:

a)  $x^2 - 2x + 10$

b)  $z^2 + z + 1 + i$

Riešenie:

a)  $D = 4 - 40 = -36$

$$\sqrt{D} = \pm 6i$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 6i}{2} = 1 \pm 3i$$

$$\underline{\underline{x^2 - 2x + 10 = (x - 1 + 3i)(x - 1 - 3i)}}$$

b)  $D = 1 - 4 - 4i = -3 - 4i$

$$\sqrt{D} = \sqrt{-3 - 4i} = a + bi$$

$$\underline{\underline{-3 - 4i = a^2 - b^2 + 2abi}}$$

$$\underline{\underline{-3 = a^2 - b^2}}$$

$$\underline{\underline{-4 = 2ab \Rightarrow ab = -2}}$$

$$\underline{\underline{-3b^2 = (ab)^2 - b^4}}$$

## MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

### *MATURITNÝ OKRUH 18: KOMPLEXNÉ ČÍSLA*

$$\begin{aligned}
 -3b^2 &= 4 - b^4 \\
 b^4 - 3b^2 - 4 &= 0 \\
 (b^2 - 4)(b^2 + 1) &= 0 \\
 b = \pm 2 \Rightarrow a = \mp 1 \Rightarrow \sqrt{D} &= \pm 1 \mp 2i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 z_{1,2} = \frac{-1 \pm 1 \mp 2i}{2} \Rightarrow z_1 &= -i \\
 &\Rightarrow z_2 = -1 + i
 \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{z^2 + z + 1 + i = (z + i)(z + 1 - i)}}$$

### 3. príklad (201/8,9,10)

Zadanie: Určte v Gaussovej rovine obrazy množín:

- $M = \{z \in \mathbb{C}; z \cdot \bar{z} = 4\}$
- $M = \{z \in \mathbb{C}; |z - 1| + |z + 1| < 4\}$
- $M = \{z \in \mathbb{C}; 2 \leq |z - 4 + i| \leq 3\}$

Riešenie:

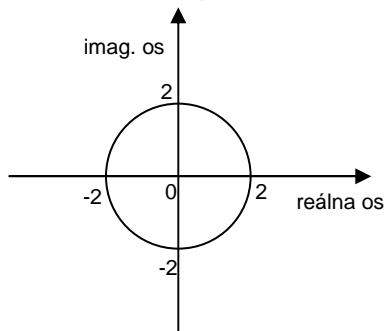
a)  $(a + bi)(a - bi) = a^2 - b^2i^2 = a^2 + b^2 = 4 \Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = 2 \Rightarrow |z| = 2$

Množina  $M$  sa v Gaussovej rovine zobrazí ako kružnica so stredom v bode, ktorý je obrazom komplexného čísla  $[0,0]$  a polomerom 2.

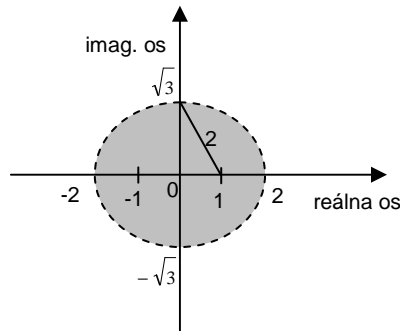
b) Súčet vzdialeností od bodov, ktoré sú obrazmi komplexných čísel  $[-1,0], [1,0]$  musí byť  $< 4 \Rightarrow$  body, ktoré sú obrazy komplexných čísel  $z$  tvoria vnútro elipsy s ohniskami  $[-1,0], [1,0]$  a hlavnou poloosou 2.

c) Množina  $M$  sa v Gaussovej rovine zobrazí ako medzikružie sústredných kružníc so stredom v bode, ktorý je obrazom komplexného čísla  $[4,-1]$  a polomerami 2 a 3 aj s hraničnými kružnicami.

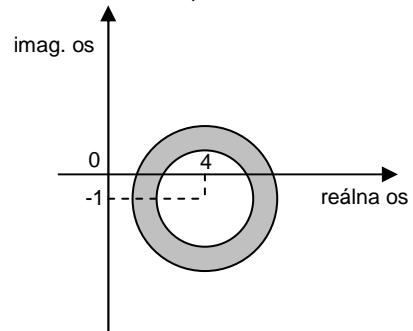
obr. k úlohe a):



obr. k úlohe b):



obr. k úlohe c):



### 4. príklad (202/17)

Zadanie: Riešte v  $\mathbb{C}$  rovnicu  $(z - 3)^2 + (\bar{z} + i)^2 = 4$ .

Riešenie:

## MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

### **MATURITNÝ OKRUH 18: KOMPLEXNÉ ČÍSLA**

$$\begin{aligned} (a+bi-3)^2 + (a-bi+i)^2 &= 4 \\ (a-3)^2 + b^2i^2 + 2(a-3)bi + a^2 + (1-b)^2i^2 + 2a(1-b)i &= 4 \\ a^2 - 6a + 9 - b^2 + 2abi - 6bi + a^2 - 1 + 2b - b^2 + 2ai - 2abi &= 4 \\ \frac{(2a^2 - 6a - 2b^2 + 8 + 2b) + (2a - 6b)i}{2a^2 - 6a - 2b^2 + 8 + 2b} &= \frac{4 + 0 \cdot i}{2a - 6b = 0 \Rightarrow a = 3b} \\ 18b^2 - 18b - 2b^2 + 8 + 2b &= 4 \\ 16b^2 - 16b + 4 &= 0 \\ 4(2b-1)^2 &= 0 \end{aligned}$$

$$b = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{3}{2} \Rightarrow \underline{\underline{K = \left\{ \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i \right\}}}$$

### 5. príklad (198/2)

Zadanie: V Gaussovej rovine určte obrazy všetkých komplexných čísel  $z$ , pre ktoré platí  $\sin |z| = \frac{1}{2}$

a súčasne  $\left| \frac{z}{|z|} + |z| \right| < 1$ .

Riešenie:

$$\sin |z| = \frac{1}{2} \Rightarrow |z| = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee |z| = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad \text{imag. os}$$

$$\left| \frac{z}{|z|} + |z| \right| < 1$$

$$\left| \frac{z + |z|^2}{|z|} \right| < 1$$

$$\left| \frac{z + z \cdot \bar{z}}{|z|} \right| < 1$$

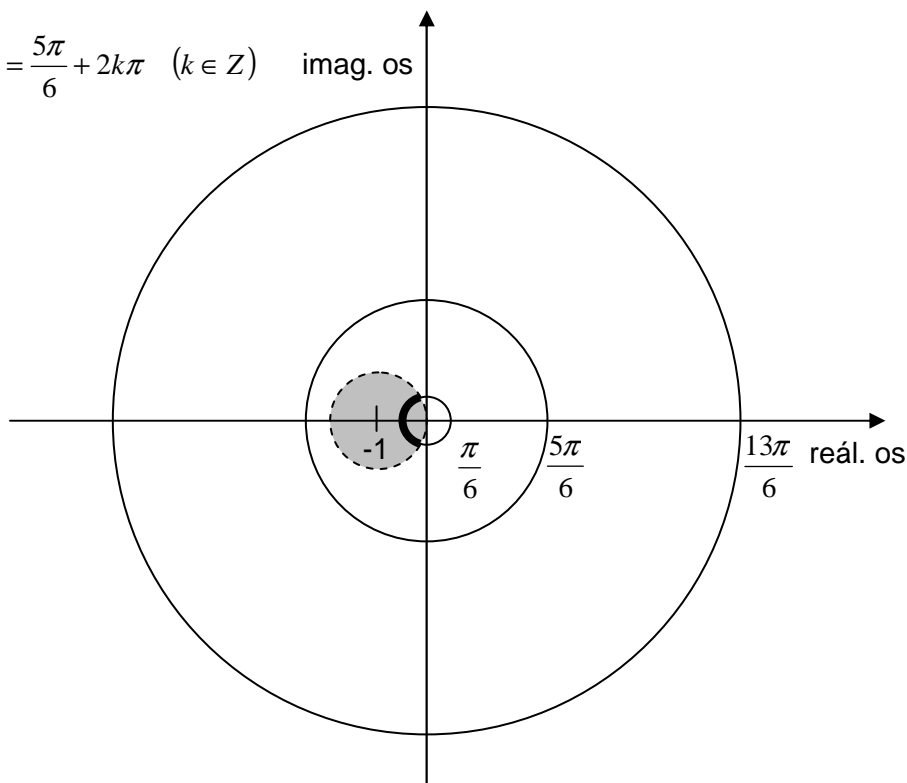
$$\left| \frac{z \cdot (1 + \bar{z})}{|z|} \right| < 1$$

$$\left| \frac{z \cdot (1 + z)}{|z|} \right| < 1$$

$$\left| \frac{|z| \cdot |1 + z|}{|z|} \right| < 1$$

$$|1 + z| < 1$$

$$|1 + z| < 1$$



## MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

### **MATURITNÝ OKRUH 18: KOMPLEXNÉ ČÍSLA**

Prvú podmienku spĺňajú všetky komplexné čísla, ktorých obrazy v Gaussovej rovine patria niektorej zo sústredných kružníc so stredom v bode, ktorý je obrazom komplexného čísla  $[0,0]$  a polomeri

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ alebo } \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Druhú podmienku spĺňajú všetky komplexné čísla, ktorých obrazy v Gaussovej rovine patria vnútru kruhu so stredom v bode, ktorý je obrazom komplexného čísla  $[-1,0]$  a polomerom 1.

Výsledná množina komplexných čísel spĺňujúcich obidve podmienky je prienikom množiny komplexných čísel spĺňajúcich prvú podmienku a množiny komplexných čísel spĺňajúcich druhú podmienku. *Je to teda otvorený kružnicový oblúk AB (bez krajných bodov) na kružnici so stredom*

*v bode, ktorý je obrazom komplexného čísla  $[0,0]$  a polomerom  $\frac{\pi}{6}$ , ktorý leží v kruhu so stredom*

*v bode, ktorý je obrazom komplexného čísla  $[-1,0]$  a polomerom 1. Na obrázku je hľadaný kružnicový oblúk zobrazený hrubou čiarou.*