Autor: Martin Slota

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

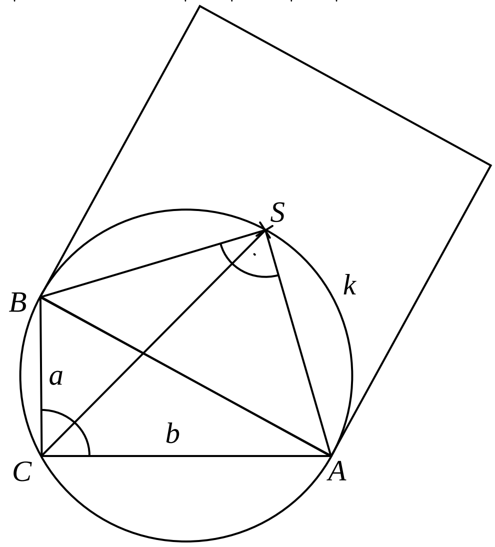
MATURITNÝ OKRUH 25: KRUŽNICA

1. príklad (266/Pr. 1)

Zadanie: Nech ABC je pravouhlý trojuholník s pravým uhlom pri vrchole C. Zostrojme nad jeho preponou AB štvorec, jeho stred označme S. Dokážte, že $\overleftrightarrow{CS}$ je os pravého uhla a určte dĺžku $|CS|$.

Dôkaz (priamy):

Nech k je Tálesova kružnica nad priemerom AB. Na tejto kružnici ležia body C, S. Uhol BCS je obvodový uhol prislúchajúci oblúku BS. Uhol ACS je obvodový uhol prislúchajúci oblúku AS. Keďže S je stred štvorca, platí $|BS| = |AS|$, a teda aj dĺžka oblúkov BS a AS bude rovnaká. Teda aj príslušné obvodové uhly sa rovnajú. Tým je dokázané, že priamka $\overleftrightarrow{CS}$ je osou uhla pri vrchole C.
Keďže štvoruholník $ASBC$ je tetivový (všetky štyri vrcholy ležia na Tálesovej kružnici k, platí v ňom Ptolemaiova veta (pozri pozn.): $|SC| \cdot |AB| = |AC| \cdot |BS| + |BC| \cdot |AS|$. Označme $|AC| = b, |BC| = a$. Potom teda z Pytagorových viet v trojuholníku



a) ABC musí platiť $|AB| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

b) ABS musí platiť $|AS| = |BS| = \sqrt{\frac{|AB|^2}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}$.

Po dosadení dostávame:

$$|SC| = \frac{b \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{a^2+b^2} + a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2} \cdot (a+b)}{2}}}$$

pozn. (poznatky o tetivových štvoruholníkoch):

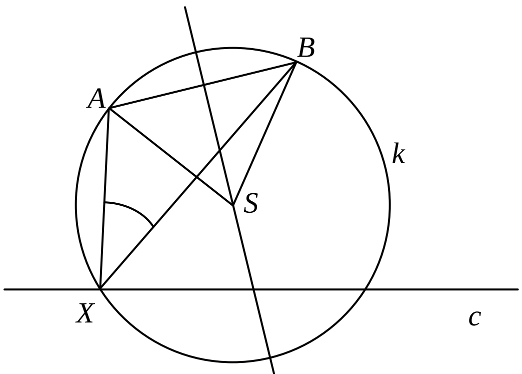
1. Štvoruholník sa nazýva tetivový, ak mu možno opísať kružnicu (ktorá prechádza všetkými štyrmi jeho vrcholmi).
2. Štvoruholník $ABCD$ je tetivový práve vtedy, keď pre jeho vnútorné uhly platí $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180°$
3. Ptolemaiova veta: V ľubovoľnom štvoruholníku $ABCD$ platí, že súčin veľkostí uhlopriečok je menší, alebo sa rovná súčtu súčinov veľkostí protiľahlých strán:
   $|AC| \cdot |BD| \leq |AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |BC|$
   Rovnosť nastáva práve vtedy, keď je štvoruholník tetivový.

2. príklad (267/2)

Zadanie: Pri ceste je umiestnený pútač AB nerovnobežne s cestou, pričom z každého miesta na ceste ho je vidieť pod ostrým zorným uhlom. Z ktorého miesta cesty ho máme fotografovať, aby bol záber urobený pod najväčším možným zorným uhlom?

Riešenie:

Nech X je bod na ceste. Potom zorný uhol AXB sa rovná polovici príslušného stredového uhla ASB, kde S je stred kružnice opísanej bodom A, B, X. Veľkosť tohto uhla vzrastá, keď sa bod S približuje po osi úsečky AB k jej



Autor: Martin Slota

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 25: KRUŽNICA

stredu. Kružnica k so stredom S a polomerom $r = |SA|$ však musí mať s priamkou c (cesta) aspoň jeden spoločný bod. Je zrejmé, že maximálne prípustné priblíženie bodu S k úsečke AB nastane vtedy, keď sa kružnica k dotýka priamky c. Vtedy bude uhol ASB, a teda aj uhol AXB, maximálny.

Úloha sa teda zredukovala na nájdenie kružnice prechádzajúcej danými bodmi A, B a dotýkajúcej sa danej priamky c. Túto úlohu budeme riešiť pomocou mocnosti bodu ku kružnici (pozri pozn.). Označme P priesečník priamok AB a c. Pre hľadaný bod dotyku X priamky a kružnice potom musí platiť $|PX|^2 = |PA| \cdot |PB|$, čiže $|PX| = \sqrt{|PA| \cdot |PB|}$. Túto dĺžku vieme skonštruovať napríklad pomocou Euklidovej vety o výške. Keď teda od bodu P nanesieme (na správnu polpriamku) na priamke c dĺžku $\sqrt{|PA| \cdot |PB|}$, dostaneme hľadaný bod X, z ktorého je vidieť úsečku AB (pútač) pod najväčším zorným uhlom.

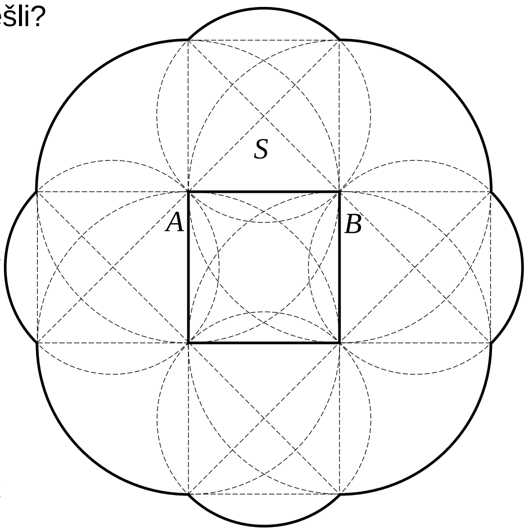
pozn. – veta o mocnosti bodu ku kružnici:

Nech $k(S, r)$ je kružnica v rovine a M bod neležiaci na tejto kružnici. Nech p, q sú dve sečnice kružnice k prechádzajúce bodom M a pretínajúce kružnicu k v bodoch P_1, P_2, Q_1, Q_2 $(p \cap k = \{P_1, P_2\}, q \cap k = \{Q_1, Q_2\})$. Potom platí: $|P_1M| \cdot |P_2M| = |Q_1M| \cdot |Q_2M| = |SM|^2 - r^2$

3. príklad (270/4)

Zadanie: Obišli sme raz dookola budovu so štvorcovým pôdorysom $20m \times 20m$ tak, že sme ju po celý čas videli pod zorným uhlom 45°. Akú dráhu sme prito m prešli?

Riešenie:



Aby sme mohli vypočítať dĺžku prejdenej dráhy, musíme najprv zistiť, akú dráhu sme vlastne prešli. Budovu si môžeme predstaviť ako štvorec v rovine. Dráhu, ktorú prejdeme, môžeme rozdeliť na dve časti – v jednej časti budú všetky také body, z ktorých vidíme práve dva (susedné) vrcholy štvorca a v druhej budú všetky také body, z ktorých vidíme práve tri vrcholy štvorca.

Najskôr uvažujme iba tú prvú časť dráhy. Tvoria ju body, z ktorých je vidieť iba jednu stranu štvorca (čiže jednu stenu budovy). Zvolíme si teda jednu stranu štvorca (pre ostatné bude riešenie obdobné) a označíme si ju AB. Zostrojíme nad ňou Tálesovu kružnicu, nájdeme jej prienik s osou úsečky AB, označíme ho S (bod „pod“ úsečkou AB nás nezaujíma) a narysujeme kružnicu k so stredom v bode S a polomerom $|SA|$. Teraz platí, že stredový uhol prislúchajúci oblúku AB je 90° (Tálesova kružnica), a teda obvodový uhol prislúchajúci tomuto oblúku bude 45° (polovica stre dového uhla). Dráha v tejto časti roviny bude teda kružnicový oblúk kružnice k nachádzajúci sa „nad“ úsečkou AB. Rovnako môžeme zostrojiť dráhu „nad“ ostatnými úsečkami reprezentujúcimi steny budovy.

Teraz k 2. časti dráhy. Z miest, z ktorých vidíme tri vrcholy štvorca, môžeme považovať za smerodajné pre náš zorný uhol iba vrcholy, ktorých spojením dostaneme uhlopriečku štvorca. Pre každú uhlopriečku vieme zostrojiť dve kružnice so stredmi v ostatných bodoch štvorca a polomerom $20\ m$ (strana štvorca). Oblúky týchto kružníc nám dotvoria dráhu, po ktorej sme prešli.

Autor: Martin Slota

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 25: KRUŽNICA

Dĺžka zostrojenej dráhy bude teda: $l = 2\pi \cdot \frac{20}{\sqrt{2}} + 2\pi \cdot 20 = \underline{\underline{20\pi \cdot \left(\sqrt{2}+2\right)m}}$.

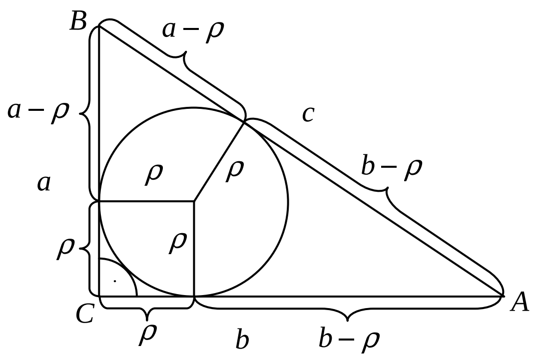
4. príklad (270/5)

Zadanie: Vyjadrite v pravouhlom trojuholníku veľkosť polomeru vpísanej kružnice pomocou dĺžok strán.

Riešenie:

Polomer vpísanej kružnice si označíme ρ, trojuholník nech je ABC s pravým uhlom pri vrchole C a stranami a,b,c. Situáciu si načrtneme (pozri obr.), pričom využívame poznatok, že vzdialenosť daného bodu a dotykových bodov dotyčníc k danej kružnici z tohto bodu je rovnaká. Z obrázku je teda zrejmé, že:

$$c = (a-\rho)+(b-\rho)$$
$$2\rho = a+b-c$$
$$\rho = \frac{a+b-c}{2}$$

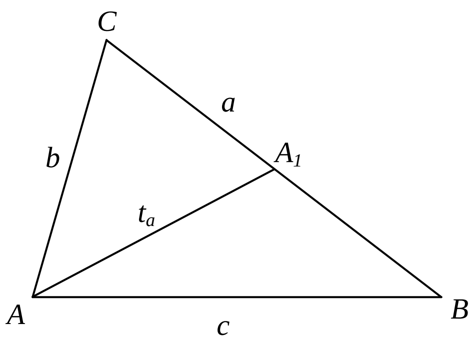


5. príklad (271/15)

Zadanie: Zostrojte trojuholník ABC, ak sú dané veľkosti strán b,c a rovnosť $2t_a = 3a$.

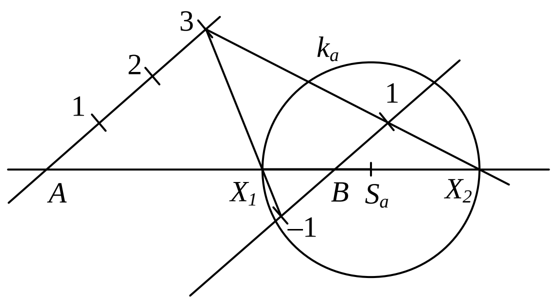
Riešenie:

Náčrt:



Rozbor:

1. $2t_a = 3a \Rightarrow t_a = \frac{3}{2}a \Rightarrow |AA_1| = \frac{3}{2}|BC| = 3|A_1B| \Rightarrow A_1 \in \{X; |AX| = 3\cdot|BX|\}$, čiže bod A_1 leží na Apolóniovej kružnici k_a. Konštrukcia Apolóniovej kružnice $(k=3)$:



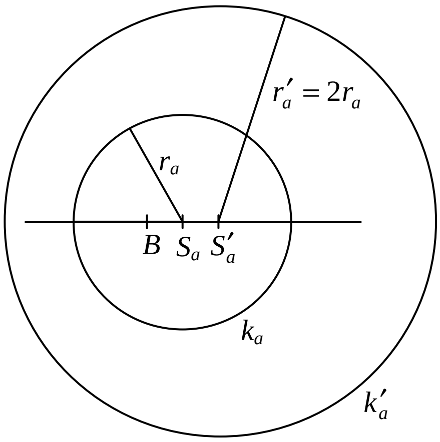
Autor: Martin Slota

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 25: KRUŽNICA

2. $H_{B,2} : A_1 \to C$

   $H_{B,2} : k_a \to k'_a$



$|BS'_a| = 2 \cdot |BS_a|$

3. $l; l(A,b)$

   $C \in l \cap k'_a$