Autor: Martin Slota

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 30: KUŽEĽOSEČKY

1. príklad (310/Pr. 1)

Zadanie: V karteziánskej sústave súradníc nakreslite kužeľosečku, ktorá má rovnicu $x^2 - y^2 + 3x + y + 2 = 0$.

Riešenie:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 2 \end{vmatrix} = -2 + 0 + 0 + \tfrac{9}{4} - \tfrac{1}{4} - 0 = 0 \Rightarrow \text{kužeľosečka je singulárna.}$$

Stredy $[m, n]$:

$$\left.\begin{aligned} m + \tfrac{3}{2} &= 0 \\ -n + \tfrac{1}{2} &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow m = -\frac{3}{2} \wedge n = \frac{1}{2}$$

Uvedený stred spĺňa aj rovnicu $\frac{3}{2}m + \frac{1}{2}n + 2 = 0 \Rightarrow$ je zároveň aj singulárnym bodom kužeľosečky.

Teraz určíme asymptotické smery kužeľosečky:

$[u, v] \neq [0,0]$ je AS K $\Leftrightarrow u^2 - v^2 = 0$

$u = 0 \Rightarrow v = 0 \Rightarrow$ AS nie je

$u = 1 \Rightarrow v^2 = 1 \Rightarrow v = \pm 1$

AS : $[1,1], [1,-1]$

Keďže má singulárna kužeľosečka jeden singulárny bod a dva asymptotické smery, tvoria ju dve rôznobežky, ktorých priesečníkom je singulárny bod a ktorých smerové vektory sú asymptotickými smermi kužeľosečky.

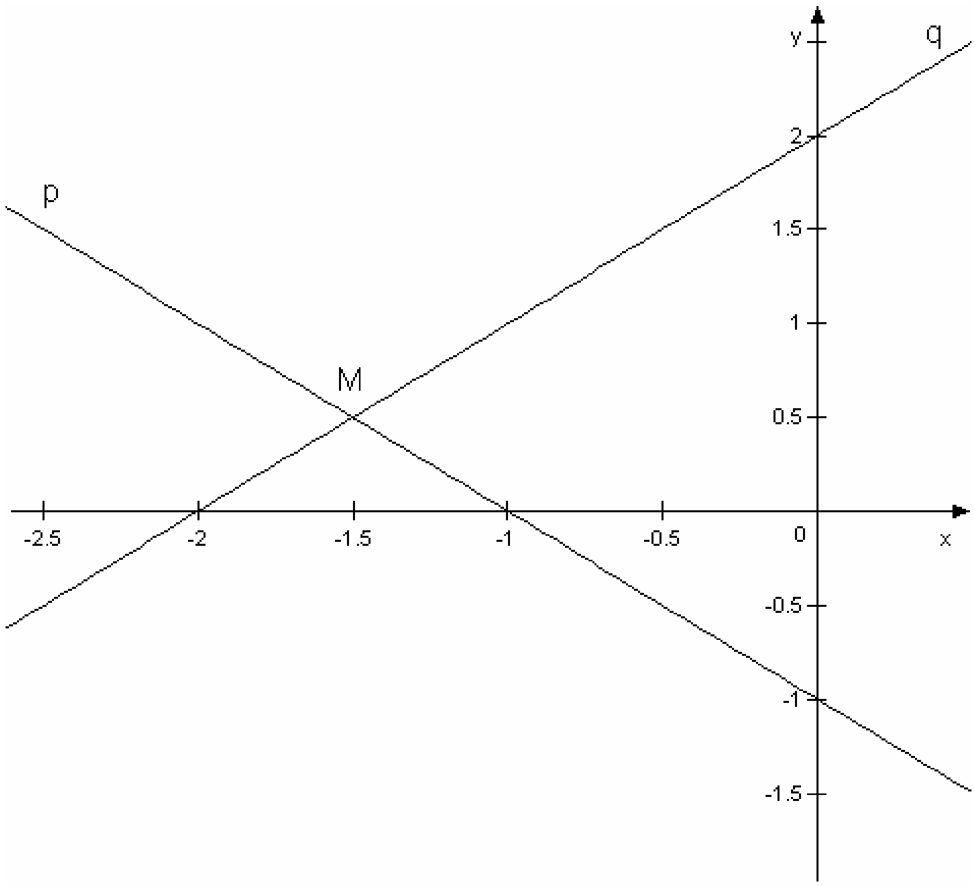
Rovnicu kužeľosečky teda môžeme zapísať aj nasledovne: $(x - y + 2)(x + y + 1) = 0$.

Teraz, keď o kužeľosečke vieme všetko potrebné, ju načrtneme (rôznobežky označíme p, q a ich priesečník označíme M):

Autor: Martin Slota

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 30: KUŽEĽOSEČKY



2. príklad (315/3)

Zadanie: Určte p,q tak, aby kužeľosečka $x^2+2pxy+y^2+2x+2qy-3=0$ bola dvojicou rovnobežiek. Napíšte ich rovnice.

Riešenie:

Kužeľosečka tvorená dvojicou rovnobežiek je singulárna $\Rightarrow$ výraz $\begin{vmatrix} 1 & p & 1 \\ p & 1 & q \\ 1 & q & -3 \end{vmatrix} =$

$=-3+pq+pq-1-q^2+3p^2=3p^2-q^2+2pq-4$ musí byť rovný nule.

Stredy $[m,n]$ kužeľosečky sa budú nachádzať na jednej priamke a bude ich nekonečne veľa $\Rightarrow$ rovnice $m+pn+1=0$ a $pm+n+q=0$ musia byť jedna násobkom druhej. Z prvého člena obidvoch rovníc vidíme, že aby sme z prvej rovnice dostali druhú, musíme ju vynásobiť číslom p. Potom táto rovnica bude $pm+p^2n+p=0$. Z toho vidieť, že $p^2=1 \wedge p=q$. Teraz nám vznikli dva prípady:

1. $p=q=1 \Rightarrow 3p^2-q^2+2pq-4=3-1+2-4=0 \Rightarrow$ kužeľosečka je naozaj singulárna.
   Rovnicu kužeľosečky teraz upravíme:

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 30: KUŽEĽOSEČKY

$$x^2+2xy+y^2+2x+2y-3=0$$
$$(x+y+1)^2=4$$
$$(x+y-1)(x+y+3)=0$$

Rovnice rovníc tvoriacich kužeľosečku sú: $x+y-1=0$ a $x+y+3=0$.

2. $p=q=-1 \Rightarrow 3p^2-q^2+2pq-4=3-1+2-4=0 \Rightarrow$ kužeľosečka je naozaj singulárna.

   Rovnicu kužeľosečky teraz upravíme:

$$x^2-2xy+y^2+2x-2y-3=0$$
$$(x-y+1)^2=4$$
$$(x-y-1)(x-y+3)=0$$

Rovnice rovníc tvoriacich kužeľosečku sú: $x-y-1=0$ a $x-y+3=0$.

3. príklad (315/5)

Zadanie: Určte asymptoty a dotyčnice regulárnej kužeľosečky $K: x^2-2xy+2x+4y-5=0$, ktoré prechádzajú bodom $[-2,1]$.

Riešenie:

$$\left.\begin{matrix}\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 2\\ 1 & 2 & -5\end{vmatrix}=0-2-2-0-4+5=-3\\ (-2)^2-2\cdot(-2)\cdot 1+2\cdot(-2)+4\cdot 1-5=3\end{matrix}\right\}\text{výrazy majú opačné znamienka } \Rightarrow [-2,1]\in \text{ vonkajšku } K.$$

Parametricky si zadáme priamku prechádzajúcu bodom $[-2,1]$ a dosadíme do rovnice kužeľosečky:

$$p: x=-2+tu$$
$$y=1+tv; t\in R$$

$$(-2+tu)^2-2\cdot(-2+tu)\cdot(1+tv)+2\cdot(-2+tu)+4\cdot(1+tv)-5=0$$
$$4-4tu+t^2u^2+4+4tv-2tu-2t^2uv-4+2tu+4+4tv-5=0$$
$$t^2\cdot(u^2-2uv)+t\cdot(-4u+4v-2u+2u+4v)+4+4-4+4-5=0$$
$$t^2\cdot(u^2-2uv)+t\cdot(8v-4u)+3=0$$

$$p\cap K=\{1\,\text{bod}\}\Leftrightarrow D=64v^2-64uv+16u^2-4\cdot 3\cdot(u^2-2uv)=0$$
$$64v^2+4u^2-40uv=0$$
$$16v^2-10uv+u^2=0$$
$$u=0\Rightarrow v=0\Rightarrow \text{nie je smerový vektor}$$
$$u=1\Rightarrow v=\tfrac{1}{2}\vee v=\tfrac{1}{8}$$

smerové vektory priamky: $[1,\tfrac{1}{2}],[1,\tfrac{1}{8}]$

Teraz určíme asymptotické smery kužeľosečky:

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 30: KUŽEĽOSEČKY

$[u_A, v_A] \neq [0,0]$ je AS K $\Leftrightarrow u_A^2 - 2u_A v_A = 0$

$u_A = 0 \Rightarrow 0 \cdot v_A = 0 \Rightarrow [0,1]$

$u_A = 1 \Rightarrow 2v_A = 1 \Rightarrow v_A = \frac{1}{2}$

AS: $[0,1], [1, \frac{1}{2}]$

Takže dotyčnica ku kužeľosečke K z bodu $[-2,1]$ je $x - 8y + 10 = 0$. Priamka so smerovým vektorom $[1, \frac{1}{2}]$ má asymptotický smer a je teda asymptota kužeľosečky prechádzajúca bodom $[-2,1]$. Jej rovnica je $x - 2y + 4 = 0$.

4. príklad (315/6)

Zadanie: Je daná kužeľosečka

a) $2x^2 - 4xy + 2y^2 + 3x - 5y + 2 = 0$

b) $6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$

Určte druh, stred a asymptoty kužeľosečky.

Riešenie:

a) $K: 2x^2 - 4xy + 2y^2 + 3x - 5y + 2 = 0$

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & \frac{3}{2} \\ -2 & 2 & -\frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & 2 \end{vmatrix} = 8 - \frac{15}{2} - \frac{15}{2} - \frac{9}{2} - \frac{25}{2} - 8 = -2 \Rightarrow$$ kužeľosečka je regulárna.

Stredy $[m,n]$:

$$\left.\begin{aligned} 2m - 2n + \tfrac{3}{2} &= 0 \\ -2m + 2n - \tfrac{5}{2} &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$ kužeľosečka nemá stredy.

Asymptotické smery kužeľosečky:

$[u, v] \neq [0,0]$ je AS K $\Leftrightarrow 2u^2 - 4uv + 2v^2 = 0$

$u = 0 \Rightarrow v = 0 \Rightarrow$ AS nie je

$\mathrm{u} = 1 \Rightarrow \mathrm{v}^2 - 2v + 1 = 0 \Rightarrow v = 1$

AS: $[1,1]$

Kužeľosečka nemá stredy a má jeden asymptotický smer $[1,1]$, čiže je to parabola. Môžeme teda o nej zároveň aj vyhlásiť, že nemá asymptoty.

b) $K: 6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & -6 \\ 3 & 8 & -13 \\ -6 & -13 & 11 \end{vmatrix} = 0 + 234 + 234 - 288 - 0 - 99 = 81 \Rightarrow$$ kužeľosečka je regulárna.

Stredy $[m,n]$:

$$\left.\begin{aligned} 3n - 6 &= 0 \\ 3m + 8n - 13 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow n = 2 \Rightarrow m = -1 \Rightarrow$$ kužeľosečka má jeden stred $[-1,2]$.

Asymptotické smery kužeľosečky:

Autor: Martin Slota

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 30: KUŽEĽOSEČKY

$[u,v]\neq[0,0]$ je AS K $\Leftrightarrow 6uv+8v^2=0$

$u=0\Rightarrow v=0\Rightarrow$ AS nie je

$u=1\Rightarrow 8v^2+6v=0\Rightarrow 2v(4v+3)=0\Rightarrow v=0\vee v=-\frac{3}{4}$

AS: $[1,0],[4,-3]$

Asymptoty:

$a_1: y-2=0$

$a_2: 3x+4y-5=0$

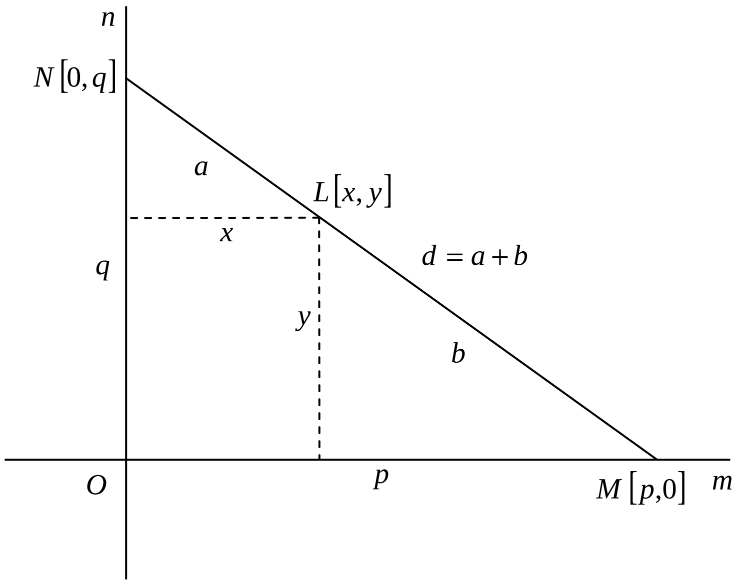
Kužeľosečka má jeden stred $[-1,2]$ a dve asymptoty $y-2=0$ a $3x+4y-5=0$, je to hyperbola.

5. príklad (316/14)

Zadanie: Úsečka pevnej dĺžky d sa pohybuje tak, že jej krajné body M,N sa pohybujú po dvoch navzájom kolmých priamkach $m,n\ (M\in m; N\in n)$. Určte množinu všetkých bodov, ktoré pritom opisuje vnútorný bod L úsečky MN.

Riešenie:

Najprv si podľa obr. zavedieme súradnicovú sústavu.



Z obrázku vidíme, že platí:

1. $a,b=\text{konšt.}$ (pre zvolený bod L úsečky MN)
2. $\frac{x}{a}=\frac{p-x}{b}\Rightarrow xb=ap-ax\Rightarrow p=\frac{x\cdot(a+b)}{a}$
3. $\frac{y}{b}=\frac{q-y}{a}\Rightarrow ya=bq-by\Rightarrow q=\frac{y\cdot(a+b)}{b}$
4. $p^2+q^2=(a+b)^2$

Teraz dosadíme prvú a druhú rovnicu do tretej:

Autor: Martin Slota

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 30: KUŽEĽOSEČKY

$$\frac{x^2 \cdot (a+b)^2}{a^2} + \frac{y^2 \cdot (a+b)^2}{b^2} = (a+b)^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Pokiaľ je teda bod L stredom úsečky $MN\,(a=b)$, opisuje kružnicu s rovnicou v stredovom tvare $x^2 + y^2 = a^2$. V ostatných prípadoch bod L opisuje elipsu s rovnicou $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.