Autor: Martin Slota

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

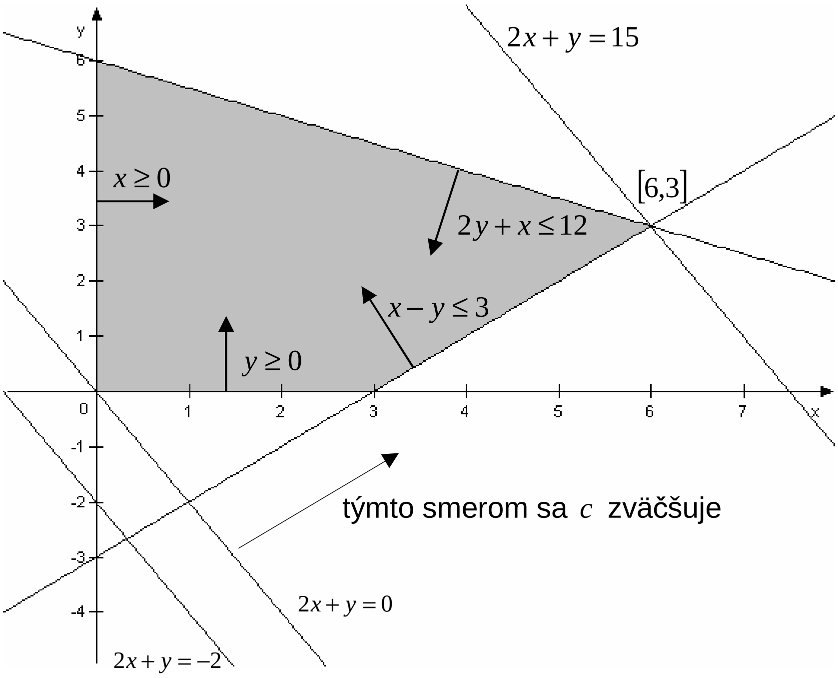
MATURITNÝ OKRUH 5: LINEÁRNE ROVNICE A NEROVNICE

1. príklad (57/Pr. 3)

Zadanie: Nájdite reálne čísla x, y, pre ktoré platí $x \ge 0,\ y \ge 0,\ 2y + x \le 12,\ x - y \le 3$ a zároveň cieľová funkcia $c\left(x, y\right) = 2x + y$ nadobúda maximálnu hodnotu.

Riešenie:

Najprv si zistíme množinu bodov, z ktorej sú čísla x, y (zafarbená šedou farbou na obrázku):



Spomedzi priamok $2x + y = c$ hľadáme teraz tú, ktorá má maximálne c, a pritom neprázdny prienik so zakreslenou množinou bodov. Je ňou priamka $2x + y = 15$, ktorá sa dotýka zakreslenej oblasti v bode $[6,3]$. Hľadaným optimálnym riešením je teda $x = 6,\ y = 3,\ c\left(x, y\right) = 15$.

2. príklad (58/4)

Zadanie: Vyriešte sústavu s reálnymi parametrami a, b, c:

$$\begin{aligned} 3x - y - 2z &= a \\ -2x + 3y - z &= b \\ -x - 2y + 3z &= c \end{aligned}$$

Riešenie:

Rovnicu budeme riešiť Gaussovou eliminačnou metódou:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -2 & a \\ -2 & 3 & -1 & b \\ -1 & -2 & 3 & c \end{array}\right) \quad /\cdot(-2) \quad /\cdot 3 \quad /\cdot(-1)$$

Autor: Martin Slota

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 5: LINEÁRNE ROVNICE A NEROVNICE

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -7 & 7 & a+3c \\ 0 & 7 & -7 & b-2c \\ 1 & 2 & -3 & -c \end{array}\right) \quad /:7$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & a+b+c \\ 0 & 1 & -1 & \dfrac{b-2c}{7} \\ 1 & 2 & -3 & -c \end{array}\right) \quad /\cdot(-2)$$

$a+b+c \neq 0 \Rightarrow K=\phi$

Ak $a+b+c=0$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{b-2c}{7} \\ 1 & 0 & -1 & \frac{-2b-3c}{7} \end{array}\right)$$

Záver:

a,b,c	K
$a+b+c \neq 0$	$K=\phi$
$a+b+c=0$	$\left\{\left[\dfrac{-2b-3c}{7}+z,\ \dfrac{b-2c}{7}+z,\ z\right];\ z\in R\right\}$

3. príklad (59/7)

Zadanie: Gazda kúpil na trhu svine, kozy a ovce. Spolu 100 hláv za 100 dukátov. Prasa stojí $3\frac{1}{2}$ dukáta, koza $1\frac{1}{3}$ a ovca $\frac{1}{2}$ dukáta. Koľko zvierat jednotlivých druhov kúpil?

Riešenie:

Počet svíň označíme s, počet kôz k a počet oviec o. Zo zadania vyplýva, že:

$$s+k+o=100$$

$$\frac{7}{2}s+\frac{4}{3}k+\frac{1}{2}o=100$$

Máme teda dve rovnice o troch neznámych, pričom neznáme $s,k,o\in N$. V druhej rovnici teraz odstránime zlomky: $21s+8k+3o=600$

Teraz pričítame (–3)-násobok prvej rovnice k druhej rovnici a zbavíme sa tak neznámej o: $18s+5k=300$

$(5\,|\,5k \wedge 5\,|\,300) \Rightarrow 5\,|\,18s \Rightarrow 5\,|\,s$. Vypíšeme teda výsledky do tabuľky:

Riešenie č.	s	$k=\dfrac{300-18s}{5}$	$o=100-s-k$
1	5	42	53
2	10	24	66
3	15	6	79

Autor: Martin Slota

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 5: LINEÁRNE ROVNICE A NEROVNICE

4. príklad (59/10)

Zadanie: Nájdite všetky hodnoty parametra $c \in R$, pre ktoré sústava $\begin{matrix} -4x+cy=1+c \\ (6+c)x+2y=3+c \end{matrix}$ nemá riešenie.

Riešenie:

Sústava nemá riešenie, pokiaľ $\exists k \in R-\{0\}; (-4k=6+c) \wedge (kc=2) \wedge (k\cdot(1+c) \neq 3+c)$

Z prvej rovnice si vyjadríme k a dosadíme do druhej:

$$\frac{6+c}{-4}\cdot c=2$$
$$c^2+6c+8=0$$
$$(c+2)\cdot(c+4)=0$$

Teraz ešte musíme overiť, či platí aj tretia podmienka:

$c=-2 \Rightarrow k=-1 \Rightarrow k\cdot(1+c)=1=3+c \Rightarrow$ sústava má riešenie.

$c=-4 \Rightarrow k=-\frac{1}{2} \Rightarrow k\cdot(1+c)=\frac{3}{2} \neq -1=3+c \Rightarrow$ sústava nemá riešenie.

Sústava teda nemá riešenie len pre $c=-4$.

5. príklad (60/17)

Zadanie: Zistite, pre ktoré celé čísla b má sústava rovníc

$$\begin{aligned} x_1+bx_2 &= 3b^3 \\ 2bx_1+x_2+2bx_3 &= 2b^3 \\ bx_2+x_3 &= b^3 \end{aligned}$$

riešenie v obore celých čísel a pre každé také b vypíšte všetky tieto riešenia.

Riešenie:

Keď všetky tri rovnice sčítame, dostaneme rovnicu $(2b+1)\cdot(x_1+x_2+x_3)=6b^3$. Úpravou dostávame $x_1+x_2+x_3=\frac{6b^3}{2b+1}$. Keďže obe strany rovnice sú celé čísla, musí platiť:

$$(2b+1)\,|\,6 \Rightarrow ((2b+1)\in\{\pm1,\pm2,\pm3,\pm6\}) \wedge (b\in Z \Rightarrow (2b+1)\ \text{je nepárne}) \Rightarrow (2b+1)\in\{\pm1,\pm3\}$$

$2b+1=1 \Rightarrow b=0 \Rightarrow \underline{x_1=x_2=x_3=0}$

$$2b+1=-1 \Rightarrow b=-1 \Rightarrow \left.\begin{aligned} x_1-x_2&=-3 \\ -2x_1+x_2-2x_3&=-2 \\ -x_2+x_3&=-1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow -2x_2+6+x_2-2x_2+2=-2 \Rightarrow 3x_2=10 \Rightarrow \underline{x_2 \notin Z}$$

$$2b+1=3 \Rightarrow b=1 \Rightarrow \left.\begin{aligned} x_1+x_2&=3 \\ 2x_1+x_2+2x_3&=2 \\ x_2+x_3&=1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow -2x_2+6+x_2-2x_2+2=2 \Rightarrow 3x_2=6 \Rightarrow \underline{x_2=2 \Rightarrow x_1=1,\ x_3=-1}$$

$$2b+1=-3 \Rightarrow b=-2 \Rightarrow \left.\begin{aligned} x_1-2x_2&=-24 \\ -4x_1+x_2-4x_3&=-16 \\ -2x_2+x_3&=-8 \end{aligned}\right\} \Rightarrow -8x_2+96+x_2-8x_2+32=-16 \Rightarrow 15x_2=144 \Rightarrow \underline{x_2 \notin Z}$$

Pre $b=0$ má sústava riešenie $x_1=x_2=x_3=0$. Pre $b=1$ má sústava riešenie $x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=-1$.