

1/2

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 3: METÓDY DÔKAZOV V MATEMATIKE

1. príklad (31/Pr. 1)

Zadanie: Dokážte, že číslo $\sqrt{7}$ je iracionálne.

Dôkaz (sporom):

$$\sqrt{7} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{7} = \frac{p}{q} \quad (p, q \in \mathbb{N}; D(p, q) = 1) \Rightarrow \frac{p^2}{q^2} = 7 \Rightarrow p^2 = q^2 \cdot 7 \Rightarrow 7 \mid p^2 \Rightarrow 7 \mid p \Rightarrow \exists k (k \in \mathbb{N}); p = 7k \Rightarrow$$

$\Rightarrow 7q^2 = 49k^2 \Rightarrow q^2 = 7k^2 \Rightarrow 7 \mid q^2 \Rightarrow$ spor s tým, že $D(p, q) = 1 \Rightarrow$ neplatí negácia tvrdenia \Rightarrow platí pôvodné tvrdenie ČBTD.

Dôkaz pomocného tvrdenia:

TD: $\forall n \in \mathbb{N}; 7 \mid n^2 \Rightarrow 7 \mid n$

Dôkaz (nepriamy):

obmena: $\forall n \in \mathbb{N}; 7 \nmid n \Rightarrow 7 \nmid n^2$

$$\forall n \in \mathbb{N}; 7 \nmid n \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}; n = \begin{cases} 7k+1 \Rightarrow n^2 = 49k^2 + 14k + 1 \\ 7k+2 \Rightarrow n^2 = 49k^2 + 28k + 4 \\ \vdots \\ 7k+6 \Rightarrow n^2 = 49k^2 + 84k + 36 \end{cases} \Rightarrow 7 \nmid n^2 \Rightarrow \text{platí obmenený výrok} \Rightarrow$$

platí aj pôvodný výrok ČBTD.

2. príklad (32/2)

Zadanie: Dokážte, že ak $\sqrt{a} + \sqrt{b} \in \mathbb{Q}$ pre nejaké $a, b \in \mathbb{Q}$, tak aj $\sqrt{a} \in \mathbb{Q}$ aj $\sqrt{b} \in \mathbb{Q}$.

Dôkaz (priamy):

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{a} + \sqrt{b} = \frac{p}{q} \quad (p, q \in \mathbb{N}; p, q \text{ sú neúdeliteľné}) \Rightarrow \sqrt{a} = \frac{p}{q} - \sqrt{b} \Rightarrow a = \frac{p^2}{q^2} - 2\frac{p}{q}\sqrt{b} + b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\frac{p}{q}\sqrt{b} = \frac{p^2}{q^2} + b - a \Rightarrow \sqrt{b} = \frac{\frac{p^2}{q^2} + b - a}{2\frac{p}{q}} \Rightarrow \underline{\underline{\sqrt{b} \in \mathbb{Q}}} \left. \vphantom{\frac{p^2}{q^2} + b - a} \right\} \text{ČBTD}$$

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b} \in \mathbb{Q} \wedge \sqrt{b} \in \mathbb{Q}) \Rightarrow \underline{\underline{\sqrt{a} \in \mathbb{Q}}}$$

3. príklad (35/2)

Zadanie: Dokážte priamo: $\forall a, b \in (1, \infty); \log_a b + \log_b a \geq 2$.

Dôkaz (priamy):

$$\forall a, b \in (1, \infty); \log_a b + \log_b a = \log_a b + \frac{\log_a a}{\log_a b} = \log_a b + \frac{1}{\log_a b} = x + \frac{1}{x} \quad (x = \log_a b) \geq 2 \quad \text{ČBTD.}$$

Pomocné tvrdenie:

$$\forall x \in \mathbb{R}^+; x + \frac{1}{x} \geq 2 \quad (\text{keďže } a, b > 1, \text{ z grafu logaritmickej funkcie vieme, že } \log_a b \in \mathbb{R}^+)$$

Dôkaz (priamy):

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 3: METÓDY DÔKAZOV V MATEMATIKE

$$\forall x \in \mathbb{R}^+; x + \frac{1}{x} \geq 2 \Leftrightarrow x^2 + 2x \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \geq 4 \Leftrightarrow x^2 - 2 + \frac{1}{x^2} \geq 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 \geq 0, \text{ čo je zrejmé.}$$

4. príklad (36/20)

Zadanie: Matematickou indukciou dokážte, že pre každé prirodzené číslo n je $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ deliteľné číslom 133.

Dôkaz (MI):

1. $n = 1; 133 \mid 11^2 + 12^1 \Leftrightarrow 133 \mid 133$ – platí.
2. TD: $\forall n \in \mathbb{N}; 133 \mid (11^{n+1} + 12^{2n-1}) \Rightarrow 133 \mid (11^{n+2} + 12^{2(n+1)-1})$
 $\forall n \in \mathbb{N}; 133 \mid (11^{n+1} + 12^{2n-1}) \Rightarrow 11^{n+1+1} + 12^{2n+1} = 11 \cdot 11^{n+1} + 12^2 \cdot 12^{2n-1} = 11 \cdot (11^{n+1} + 12^{2n-1}) + 133 \cdot 12^{2n-1} \Rightarrow$
 $\Rightarrow 133 \mid 11 \cdot (11^{n+1} + 12^{2n-1}) \wedge 133 \mid 133 \cdot 12^{2n-1} \Rightarrow 133 \mid (11^{n+2} + 12^{2(n+1)-1})$ ČBTD

5. príklad (35/12)

Zadanie: Dokážte priamo, že ak čísla $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ tvoria aritmetickú postupnosť, tak aj čísla a^2, b^2, c^2 tvoria aritmetickú postupnosť ($a, b, c \in \mathbb{R}; a \neq -b; a \neq -c; b \neq -c$).

Dôkaz (priamy):

$$\begin{aligned} \frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b} \text{ tvoria AP} &\Rightarrow \left(\exists d \in \mathbb{R}; \frac{1}{c+a} = \frac{1}{b+c} + d \wedge \frac{1}{a+b} = \frac{1}{c+a} + d \right) \Rightarrow \frac{1}{c+a} - \frac{1}{b+c} = \\ &= \frac{1}{a+b} - \frac{1}{c+a} \Rightarrow \frac{b+c-c-a}{(c+a)(b+c)} = \frac{a+c-a-b}{(a+b)(c+a)} \Rightarrow (b-a)(b+a) = (c-b)(c+b) \Rightarrow b^2 - a^2 = c^2 - b^2 \left. \vphantom{\frac{1}{b+c}} \right\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow c^2 - b^2 = d' \Rightarrow a^2, b^2, c^2 \text{ sú členy AP s diferenciou } d' \text{ ČBTD.} \end{aligned}$$