Autor: Martin Slota

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 1: MNOŽINY, VZŤAHY A OPERÁCIE S MNOŽINAMI

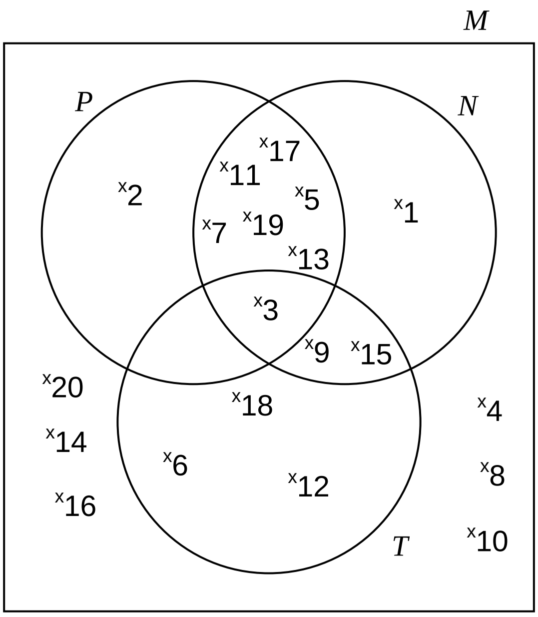
1. príklad (14/1)

Zadanie: Označme $M=\{1,2,\ldots,20\}$, P – prvočísla z M, N – nepárne čísla z M, T – čísla z M, ktoré sú deliteľné tromi.

a) Vypíšte prvky množiny $N'_M-(T-(P'_M\cap N))$

b) Vypíšte prvky množiny $M-\left[(T'_M\cap N)'_M\cup N'_M\right]$

c) Vyjadrite množinu $A=\{2,6,12,18\}$ pomocou množín M,P,N,T a základných množinových operácií.



Riešenie:

a) $N'_M-(T-(P'_M\cap N))=N'_M-(T-\{1,9,15\})=$

$=N'_M-\{3,6,12,18\}=\underline{\underline{\{2,4,8,10,14,16,20\}}}$

b) $M-\left[(T'_M\cap N)'_M\cup N'_M\right]=\{1,5,7,11,13,17,19\}$

c) $A=(P\cup T)-N$

2. príklad (15/6)

Zadanie: Dokážte nasledujúce identity:

a) $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$

b) $A\cap(B-C)=(A-C)\cap(B-C)$

Riešenie:

a) $A-(B\cap C)=\{x\in A; x\notin(B\cap C)\}=A\cap(B\cap C)' \underset{\text{de Morganove pravidlá}}{=} A\cap(B'\cup C')=(A\cap B')\cup(A\cap C')=$

$=(A-B)\cup(A-C)$ ČBTD.

b) $A\cap(B-C)=A\cap(B\cap C')=A\cap B\cap C'=A\cap C'\cap B\cap C'=(A\cap C')\cap(B\cap C')=(A-C)\cap(B-C)$ ČBTD.

3. príklad (15/7)

Zadanie: Rozhodnite, ktorá z nasledujúcich dvoch inklúzií platí pre ľubovoľné tri množiny A,B,C. Na príklade konkrétnych množín ukážte, že ju vo všeobecnosti nemožno nahradiť rovnosťou.

Autor: Martin Slota

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 1: MNOŽINY, VZŤAHY A OPERÁCIE S MNOŽINAMI

a) $A-(B-C)\subset A-(B\cup C)$

b) $A-(B\cup C)\subset A-(B-C)$

Riešenie (pozri obrázok):

a) nemusí platiť, rovnosť nastáva práve vtedy, keď $(A\cap C)=\{\}$

b) platí

Konkrétny príklad:

$A=\{1,2,3,7\}$

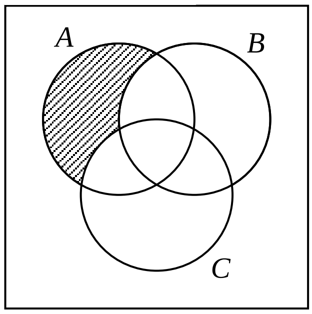
$B=\{2,3,4,6\}$

$C=\{1,3,4,5\}$

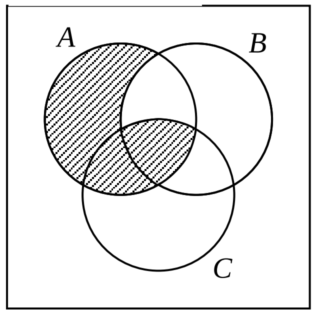
$A-(B-C)=\{1,3,7\}$

$A-(B\cup C)=\{7\}$

$A-(B\cup C)$:



$A-(B-C)$:



4. príklad (15/13)

Zadanie: Koľko existuje permutácií číslic 1, 2, 3, 4, 5, v ktorých žiadna cifra nie je na tom istom mieste ako v permutácii 12345?

Riešenie:

$P_{\text{žiadna cifra nie je na svojom mieste}} = 5! - P_{\text{aspoň jedna cifra je na svojom mieste}} = 5! - P_{A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4\cup A_5}$ (A_i je množina všetkých permutácií, v ktorých i je na svojom mieste) $= 5!-\left[\sum_{i=1}^{5}P(A_i)-\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{5}P(A_i\cap A_j)+\sum_{\substack{i,j,k=1\\ i<j<k}}^{5}P(A_i\cap A_j\cap A_k)-\sum_{\substack{i,j,k,l=1\\ i<j<k<l}}^{5}P(A_i\cap A_j\cap A_k\cap A_l)+P(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4\cap A_5)\right]=5!-\left[\binom{5}{1}\cdot 4!-\binom{5}{2}\cdot 3!+\binom{5}{3}\cdot 2!-\binom{5}{4}\cdot 1!+1\right]=$

$=5!-5!+60-20+5-1=\underline{\underline{44}}$

Permutácií hore spomenutých vlastností je 44.

5. príklad (13/Pr. 3)

Zadanie: Koľko je medzi prirodzenými číslami od 1 do 1000 takých, ktoré nie sú deliteľné dvoma, ani tromi, ani piatimi?

Riešenie:

Najprv si označme množiny: $M=\{1,2,\dots,1000\}$, $D_2=\{x\in M;2\mid x\}$, $D_3=\{x\in M;3\mid x\}$, $D_5=\{x\in M;5\mid x\}$

Našou úlohou je zistiť počet prvkov množiny $(D_2\cup D_3\cup D_5)'_M$.

Platí: $\left|(D_2\cup D_3\cup D_5)'_M\right|=1000-|D_2\cup D_3\cup D_5|$. Teraz využijeme princíp inklúzie a exklúzie:

$|D_2\cup D_3\cup D_5|=|D_2|+|D_3|+|D_5|-|D_2\cap D_3|-|D_2\cap D_5|-|D_3\cap D_5|+|D_2\cap D_3\cap D_5|$

Autor: Martin Slota

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 1: MNOŽINY, VZŤAHY A OPERÁCIE S MNOŽINAMI

Počet prvkov množín na pravej strane rovnice dokážeme vyjadriť:

$|D_2| = 500, |D_3| = 333, |D_5| = 200$

$D_2 \cap D_3$ je množina čísel z M, ktoré sú deliteľné šiestimi $\Rightarrow |D_2 \cap D_3| = 166$.

$D_2 \cap D_5$ je množina čísel z M, ktoré sú deliteľné desiatimi $\Rightarrow |D_2 \cap D_5| = 100$.

$D_3 \cap D_5$ je množina čísel z M, ktoré sú deliteľné pätnástimi $\Rightarrow |D_3 \cap D_5| = 66$.

$D_2 \cap D_3 \cap D_5$ je množina čísel z M, ktoré sú deliteľné tridsiatimi $\Rightarrow |D_2 \cap D_3 \cap D_5| = 33$.

Teda $|D_2 \cup D_3 \cup D_5| = 500 + 333 + 200 - 166 - 100 - 66 + 33 = 734$.

Čísel od 1 do 1000, ktoré nie sú deliteľné žiadnym z čísel 2, 3, 5, je 1000 – 734 = 266.