

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 7: MOCNINY

1. príklad (82/Pr. 4)

Zadanie: Určte, ktoré z čísel e^π, π^e je väčšie.

Riešenie:

Vyjdeme z hypotézy, že $e^\pi > \pi^e$, a tú dokážeme, alebo vyvrátíme. Nerovnicu zlogaritmujeme pri základe e :

$$\pi \cdot \ln e > e \cdot \ln \pi$$

$$\frac{\ln e}{e} > \frac{\ln \pi}{\pi}$$

Teraz vyšetříme priebeh funkcie $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ na $\langle e, \pi \rangle$:

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Keďže prvá derivácia funkcie f nadobúda pre čísla väčšie než e záporné hodnoty, je funkcia f klesajúca na intervale $\langle e, \infty \rangle$.

Keďže $e < \pi$, platí aj $f(e) > f(\pi)$ a naša hypotéza je dokázaná (čiže $e^\pi > \pi^e$).

2. príklad (83/7)

Zadanie: Určte hodnotu súčinu, ktorý má nekonečný počet činiteľov: $\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[8]{3} \cdot \sqrt[16]{3} \cdot \dots$ (Tento súčin chápeme ako limitu postupnosti čiastočných súčinov podobne ako pri súčte nekonečného radu.)

Riešenie:

Najprv si výraz upravíme: $\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[8]{3} \cdot \sqrt[16]{3} \cdot \dots = 3^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots}$. Teraz nám už stačí vypočítať súčet nekonečného radu $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$. Podaktorí asi už vedia, že to bude 1, ale to by na

mature asi neobstálo, takže sa to pokúsime vyjadriť podľa vzorca. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ je teda nekonečný

geometrický rad s kvocientom $q = \frac{1}{2}$ a prvým členom $a_1 = \frac{1}{2}$. Jeho súčet je teda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1.$$

Teraz už iba dosadíme: $\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[8]{3} \cdot \sqrt[16]{3} \cdot \dots = 3^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots} = 3^{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}} = 3^1 = 3$

3. príklad (83/11)

Zadanie: Určte všetky reálne čísla x , pre ktoré platí $\frac{6x - 5\sqrt{x+1}}{1 - \sqrt{x}} \leq 0$.

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 7: MOCNINY

Riešenie:

Zavedieme si substitúciu $y = \sqrt{x}$ (takže $y > 0$) a nerovnicu upravíme:

$$\frac{6y^2 - 5y + 1}{1 - y} \leq 0$$

$$\frac{6 \cdot \left(y - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(y - \frac{1}{3}\right)}{1 - y} \leq 0$$



Výsledok teda je: $y \in \left\langle \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right\rangle \cup (1, \infty) \Rightarrow x \in \left\langle \frac{1}{9}, \frac{1}{4} \right\rangle \cup (1, \infty)$.

4. príklad (83/13)

Zadanie: Pre každé kladné celé číslo n platí $28 \mid (40^n - 8^n - 5^n + 1)$. Dokážte.

Dôkaz (priamy):

Výraz si upravíme: $40^n - 8^n - 5^n + 1 = 8^n \cdot (5^n - 1) - (5^n - 1) = (8^n - 1) \cdot (5^n - 1)$. Platí vzorec $(a^n - b^n) = (a - b) \cdot (a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$, a preto:

$$\left. \begin{aligned} 8^n - 1 &= 8^n - 1^n = (8 - 1) \cdot (8^{n-1} + 8^{n-2} + \dots + 8 + 1) \Rightarrow 7 \mid (8^n - 1) \\ 5^n - 1 &= 5^n - 1^n = (5 - 1) \cdot (5^{n-1} + 5^{n-2} + \dots + 5 + 1) \Rightarrow 4 \mid (5^n - 1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 28 \mid ((8^n - 1) \cdot (5^n - 1)) \Rightarrow 28 \mid (40^n - 8^n - 5^n + 1)$$

ČBTD.

5. príklad (84/22)

Zadanie: Určte všetky reálne čísla x , pre ktoré sa štvrtý člen binomického rozvoja výrazu

$$\left(x^{\frac{1}{2(1+\log x)}} + \sqrt[12]{x} \right)^6 \text{ rovná } 200.$$

Riešenie:

Všeobecný zápis binomického rozvoja je:

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} \cdot a^n + \binom{n}{1} \cdot a^{n-1}b + \dots + \binom{n}{k} \cdot a^{n-k}b^k + \dots + \binom{n}{n} b^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \cdot a^{n-i}b^i$$

Pre náš konkrétny prípad:

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 7: MOCNINY

$$\left(\frac{6}{3}\right) \cdot x^{\frac{3}{2(1+\log x)}} \cdot \left(\sqrt[12]{x}\right)^3 = 200$$

$$20 \cdot x^{\frac{3}{2(1+\log x)} + \frac{1}{4}} = 200$$

$$x^{\frac{6+1+\log x}{4(1+\log x)}} = 10$$

$$\frac{6+1+\log x}{4(1+\log x)} \cdot \log x = \log 10 \quad y = \log x$$

$$\frac{7y + y^2}{4 + 4y} = 1$$

$$y^2 + 3y - 4 = 0$$

$$(y+4) \cdot (y-1) = 0$$

$$y = -4 \Rightarrow x = 10^{-4}$$

$$y = 1 \Rightarrow x = 10$$

$$\underline{\underline{K = \{10^{-4}, 10\}}}$$