Zdroj: http://www.zones.sk
Používanie materiálov zo ZONES.SK je povolené bez obmedzení iba na osobné účely a akékoľvek verejné publikovanie je bez predchádzajúceho súhlasu zakázané.

Autor: Martin Slota

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 6: NELINEÁRNE ROVNICE A NEROVNICE

1. príklad (74/3)

Zadanie: Pre korene kvadratickej nerovnice $x^2 - 2rx - 7r^2 = 0$ platí $x_1^2 + x_2^2 = 18$. Určte hodnotu parametra .

Riešenie:

Z Vietových vzťahov vieme: $x_1 + x_2 = 2r$ a $x_1 x_2 = -7r^2$. Využijeme teda prvý vzťah, dosadíme doňho druhý a aj zadanú rovnosť:

$$(x_1 + x_2)^2 = 4r^2$$
$$x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = 4r^2$$
$$18 + 2\cdot\left(-7r^2\right) = 4r^2$$
$$18 = 18r^2$$
$$r = \pm 1$$

Množina hodnôt parametra je teda: $\{1,-1\}$.

2. príklad (74/9)

Zadanie: Nájdite všetky reálne korene rovnice $x^6 + x^5 - 2x^4 - x^2 - x + 2 = 0$.

Riešenie:

Rovnicu upravíme:

$$x^6 + x^5 - 2x^4 - x^2 - x + 2 = 0$$
$$x^4\cdot\left(x^2 + x - 1\right) - \left(x^2 + x - 2\right) = 0$$
$$\left(x^4 - 1\right)\cdot\left(x^2 + x - 2\right) = 0$$
$$\left(x^2 - 1\right)\cdot\left(x^2 + 1\right)\cdot(x + 2)\cdot(x - 1) = 0$$
$$(x + 1)\cdot(x - 1)\cdot\left(x^2 + 1\right)\cdot(x + 2)\cdot(x - 1) = 0$$
$$(x + 1)\cdot(x - 1)^2\cdot\left(x^2 + 1\right)\cdot(x + 2) = 0$$

Z úpravy vidieť, že množinou koreňov rovnice je: $\{1,-1,-2\}$.

3. príklad (76/22)

Zadanie: V R vyriešte nerovnicu $\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > \frac{1}{2}$.

Riešenie:

Keďže obe čísla pod odmocninami musia byť kladné alebo 0, musí platiť, že $x \in \langle -1,3 \rangle$.

Teraz nerovnicu upravíme:

Používanie materiálov zo ZONES.SK je povolené bez obmedzení iba na osobné účely a akékoľvek verejné publikovanie je bez predchádzajúceho súhlasu zakázané.

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 6: NELINEÁRNE ROVNICE A NEROVNICE

$\sqrt{3-x} > \frac{1}{2} + \sqrt{x+1}$ (>0 $\Rightarrow$ umocnenie je ekvivalentná úprava)

$$3 - x > \frac{1}{4} + \sqrt{x+1} + x + 1$$

$$\frac{7}{4} - 2x > \sqrt{x+1}$$

Keďže pravá strana je kladná alebo 0, musí byť $2x \le \frac{7}{4} \Rightarrow x \le \frac{7}{8}$.

Ešte raz nerovnicu umocníme:

$$4x^2 - 7x + \frac{49}{16} > x + 1$$

$$4x^2 - 8x + \frac{33}{16} > 0$$

$$\left(x - 1 + \frac{\sqrt{31}}{8}\right) \cdot \left(x - 1 - \frac{\sqrt{31}}{8}\right) > 0$$

Z tejto nerovnice vyplýva, že $x \in \left(-\infty, 1 - \frac{\sqrt{31}}{8}\right) \cup \left(1 + \frac{\sqrt{31}}{8}, \infty\right)$. Keď však dáme všetky tri poznatky dohromady, dostaneme: $x \in \left\langle -1, 1 - \frac{\sqrt{31}}{8}\right)$.

4. príklad (76/24)

Zadanie: V R riešte rovnicu s parametrom $a \in R$: $|x| - |x-8| = |a+4| + |4-a|$.

Riešenie:

Vety, z ktorých vychádzame (dôkazy sú dosť jednoduché): $\forall a, b \in R; |a| + |b| \ge |a+b| \wedge |a| - |b| \le |a-b|$

Teraz tieto vety využijeme: $8 = |x - x + 8| \ge |x| - |x-8| = |a+4| + |4-a| \ge |a+4+4-a| = 8$

Z tohto zápisu vidíme, že znamienka nerovnosti môžeme nahradiť znamienkami rovnosti, pričom vieme, že tento prípad nastáva práve vtedy, keď výrazy $a+4$ a $4-a$ majú rovnaké znamienko (toto vyplýva z dôkazu spomínaných viet). To isté musí platiť aj pre výrazy x a $x-8$. Keby však mali výrazy $a+4$ a $4-a$ obidva záporné znamienko, po dosadení by sme dostali: $-a-4-4+a=-8 \ne 8$. Rovnaká situácia by nastala, keby výrazy x a $x-8$ mali oba záporné znamienko. Preto musia byť všetky spomínané výrazy kladné. Potom platí:

1. $((a+4 \ge 0) \wedge (4-a \ge 0)) \Rightarrow a \in \langle -4, 4\rangle$
2. $((x \ge 0) \wedge (x-8 \ge 0)) \Rightarrow \langle 8, \infty)$

Záver:

a	K
$a \in \langle -4, 4\rangle$	$\langle 8, \infty)$
$a \in (-\infty, -4) \cup (4, \infty)$	ϕ

ZONES.SK
Zóny pre každého študenta

Autor: Martin Slota

Zdroj: http://www.zones.sk

Používanie materiálov zo ZONES.SK je povolené bez obmedzení iba na osobné účely a akékoľvek verejné publikovanie je bez predchádzajúceho súhlasu zakázané.

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 6: NELINEÁRNE ROVNICE A NEROVNICE

5. príklad (75/19)

Zadanie: Nájdite všetky riešenia v obore kladných reálnych čísel:

$$x_1 + \frac{1}{x_2} = 2$$
$$x_2 + \frac{1}{x_3} = 2$$
$$\vdots$$
$$x_{100} + \frac{1}{x_1} = 2$$

Riešenie:

Keď všetky rovnice sčítame a poprehadzujeme členy, dostaneme:

$$\left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right) + \left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right) + \ldots + \left(x_{100} + \frac{1}{x_{100}}\right) = 200$$

Platí veta: $\forall k \in R^+; k + \frac{1}{k} \geq 2$, pričom $\left(k + \frac{1}{k} = 2\right) \Leftrightarrow (k = 1)$.

Podľa tejto vety teda pre súčet ľavých strán rovníc platí:

$$\left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right) + \left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right) + \ldots + \left(x_{100} + \frac{1}{x_{100}}\right) \geq 200$$

Aby nastala rovnosť, musia byť všetky neznáme rovné 1. Sústava rovníc má teda jediné riešenie, a to $x_1 = x_2 = \ldots = x_{100} = 1$.

Tvrdenie: $\forall k \in R^+; k + \frac{1}{k} \geq 2$

Dôkaz:

$$\forall k \in R^+; k + \frac{1}{k} \geq 2 \Leftrightarrow k^2 + 2 + \frac{1}{k^2} \geq 4 \Leftrightarrow k^2 - 2 + \frac{1}{k^2} \geq 0 \Leftrightarrow \left(k - \frac{1}{k}\right)^2 \geq 0$$

Keďže mocnina reálneho čísla je väčšia alebo rovná nule, je tvrdenie dokázané.

pozn.: Rovnosť nastáva $\Leftrightarrow \left(k - \frac{1}{k}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow k - \frac{1}{k} = 0 \Leftrightarrow k = \frac{1}{k} \Leftrightarrow k^2 = 1 \Leftrightarrow k = \pm 1 \left(k \in R^+\right) \Leftrightarrow \underline{k = 1}$