

## MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

### **MATURITNÝ OKRUH 10: POLYNOMICKÉ FUNKCIE**

#### **1. príklad (110/2)**

Zadanie: Určte parameter  $p \in R$  tak, aby rovnica  $x^2 - px + p - 9 = 0$  mala dva korene, ktorých rozdiel je šesť.

Riešenie:

Korene, ktoré hľadáme si označíme  $x_1, x_2$  ( $x_1 > x_2$ ). Pre tieto korene musí platiť, že:

$$(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$$

$$x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 x_2 = 0$$

Teraz je zo zadania zrejmé, že:

$$x_1 + x_2 = p$$

$$x_1 x_2 = p - 9$$

$$x_1 - x_2 = 6 \Rightarrow x_1 = 6 + x_2$$

Výsledok už teraz dostaneme jednoduchým dosadzovaním a úpravami:

$$x_1 x_2 = x_1 + x_2 - 9$$

$$(6 + x_2) \cdot x_2 = 6 + x_2 + x_2 - 9$$

$$6x_2 + x_2^2 = 2x_2 - 3$$

$$x_2^2 + 4x_2 + 3 = 0$$

$$(x_2 + 3) \cdot (x_2 + 1) = 0$$

$$x_2 = -3 \Rightarrow x_1 = 3 \Rightarrow \underline{\underline{p = 0}}$$

$$x_2 = -1 \Rightarrow x_1 = 5 \Rightarrow \underline{\underline{p = 4}}$$

Rovnica  $x^2 - px + p - 9 = 0$  má dva korene, ktorých rozdiel je šesť, ak  $p = 0$  alebo  $p = 4$ .

#### **2. príklad (110/11)**

Zadanie: Načrtnite graf funkcie  $f : y = x^5 - 7x^4 + 12x^3$ .

Riešenie:

Definičný obor funkcie je  $D(f) = R$ , funkcia je spojitá.

Nulové body funkcie:

$$f(x) = x^5 - 7x^4 + 12x^3 = x^3 \cdot (x^2 - 7x + 12) = x^3(x - 3)(x - 4) \Rightarrow \text{nulové body sú } 0, 3, 4$$

Lokálne extrémny:

$$f'(x) = 5x^4 - 28x^3 + 36x^2 = x^2 \cdot (5x^2 - 28x + 36) = 5x^2(x - 2)\left(x - \frac{18}{5}\right) \Rightarrow \text{MLE sú } 0; 3,6; 2$$

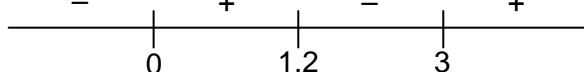


Lokálne maximum:  $[2, 16]$

Lokálne minimum:  $[3,6; -11,197]$

Konvexnosť a konkávnosť, inflexné body:

$$f''(x) = 20x^3 - 84x^2 + 72x = x \cdot (20x^2 - 84x + 72) = 20x(x - 3)\left(x - \frac{6}{5}\right) \Rightarrow \text{MIB sú } 0; 3; 1,2$$



## MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

### *MATURITNÝ OKRUH 10: POLYNOMICKÉ FUNKCIE*

Funkcia je konvexná na  $\langle 0,2 \rangle$  a na  $\langle 3,\infty \rangle$

Funkcia je konkávna na  $\langle -\infty,0 \rangle$  a na  $\langle 1,2;3 \rangle$

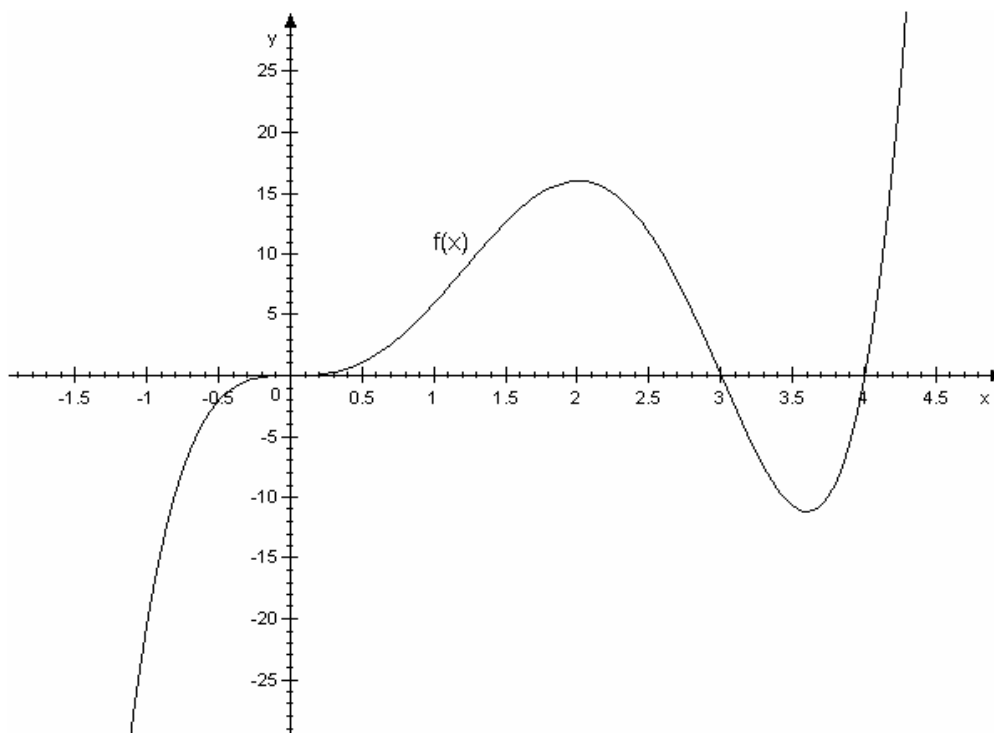
Inflexné body:  $[0,0], [1,2;8,70912], [3,0]$

Asymptoty v  $\pm\infty$ :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

Graf:



### 3. príklad (110/13)

Zadanie: V rovnici  $x^3 + px + 2 = 0$  určte  $p \in \mathbb{R}$  tak, aby rovnica mala viacnásobný koreň a potom určte všetky jej korene.

Riešenie:

Keďže rovnica je tretieho stupňa, môžeme mať maximálne trojnásobný koreň. Budeme teda uvažovať dve situácie – že má trojnásobný a že má dvojnásobný koreň:

a) Trojnásobný koreň  $x_1$ :

$$(x - x_1)^3 = 0$$

$$x^3 - 3x_1x^2 + 3x_1^2x - x_1^3 = 0$$

Keď porovnáme odvodenú rovnicu so zadanou, zistíme, že  $x_1$  by malo byť rovné 0 (člen  $x^2$  v zadanej rovnici nie je) a zároveň aj  $-\sqrt[3]{2}$ . Tento postup teda nevedie k vyriešeniu príkladu.

## MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

### *MATURITNÝ OKRUH 10: POLYNOMICKÉ FUNKCIE*

b) Dvojnásobný koreň  $x_1$  a jednonásobný koreň  $x_2$  :

$$(x - x_1)^2 \cdot (x - x_2) = 0$$

$$(x^2 - 2xx_1 - x_1^2) \cdot (x - x_2) = 0$$

$$x^3 - 2x^2x_1 + xx_1^2 - x^2x_2 + 2xx_1x_2 - x_2x_1^2 = 0$$

$$x^3 + (-2x_1 - x_2)x^2 + (2x_1x_2 + x_1^2)x - x_2x_1^2 = 0$$

Keď teraz porovnáme rovnice, zistíme, že:

$$-2x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = -2x_1$$

$$-x_2x_1^2 = 2 \Rightarrow 2x_1^3 = 2 \Rightarrow \underline{x_1 = 1} \Rightarrow \underline{x_2 = -2}$$

$$p = 2x_1x_2 + x_1^2 \Rightarrow \underline{p = -3}$$

Rovnica  $x^3 + px + 2 = 0$  má viacnásobný koreň, pokiaľ  $p = -3$ . Jej koreňmi sú potom dvojnásobný koreň 1 a jednonásobný koreň  $-2$ .

### 4. príklad (111/22)

Zadanie: Riešte v  $\mathbb{R}$  rovnicu  $4x^5 + 12x^4 + 11x^3 + 11x^2 + 12x + 4 = 0$ .

Riešenie:

Keďže táto recipročná rovnica je nepárneho stupňa, musíme najprv nájsť jeden jej koreň a dostať sa delením polynómov k recipročnej rovnici párneho stupňa. Koreňom recipročnej rovnice nepárneho stupňa je vždy 1 alebo  $-1$ . V našom prípade je to očividne  $x_1 = -1$ . Teraz rovnicu vydělíme:

$$(4x^5 + 12x^4 + 11x^3 + 11x^2 + 12x + 4) : (x + 1) = 4x^4 + 8x^3 + 3x^2 + 8x + 4$$

Vzniknutú rovnicu si najprv upravíme a potom použijeme tzv. Lagrangeovu substitúciu:

$$4x^4 + 8x^3 + 3x^2 + 8x + 4 = 0$$

$$4x^2 + 8x + 3 + \frac{8}{x} + \frac{4}{x^2} = 0$$

$$4 \cdot \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 8 \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right) + 3 = 0 \quad \left(y = x + \frac{1}{x}\right)$$

$$4 \cdot (y^2 - 2) + 8y + 3 = 0$$

$$4y^2 + 8y - 5 = 0$$

$$4 \cdot \left(y - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(y + \frac{5}{2}\right) = 0$$

Teraz už iba dopočítame  $x$ :

$$1. \quad x + \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$$

$$2x^2 + 2 = x$$

$$2x^2 - x + 2 = 0$$

$D < 0 \Rightarrow$  v  $\mathbb{R}$  nie je riešenie

$$2. \quad x + \frac{1}{x} = -\frac{5}{2}$$

$$2x^2 + 2 = -5x$$

$$2x^2 + 5x + 2 = 0$$

$$2 \cdot (x + 2) \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) = 0$$

Riešením rovnice teda je  $K = \left\{ -1, -2, -\frac{1}{2} \right\}$ .

**5. príklad (112/28)**

Zadanie: Určte kubickú funkciu, ktorá má v bode  $[4,6]$  lokálne maximum a v bode  $[6,1]$  lokálne minimum.

Riešenie:

Všeobecne takúto kubickú funkciu môžeme zapísať takto:  $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ .

Jej prvá derivácia by potom bola:  $f'(x) = 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1$ . Pre prvú deriváciu funkcie zároveň platí, že dáva nulovú hodnotu v bodoch 4 a 6 (sú v nich lokálne extrémny). Takže:

$$\begin{aligned} f'(x) = 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1 = k \cdot (x-4) \cdot (x-6) = kx^2 - 10kx + 24k &\Rightarrow 3a_3 = k &\Rightarrow a_3 = \frac{k}{3} \\ &\Rightarrow 2a_2 = -10k &\Rightarrow a_2 = -5k \\ &\Rightarrow a_1 = 24k &\Rightarrow a_1 = 24k \end{aligned}$$

Teraz ešte využijeme poznatok o funkčných hodnotách lokálnych extrémov funkcie:

$$f(4) = 6 = a_3 \cdot 4^3 + a_2 \cdot 4^2 + a_1 \cdot 4 + a_0$$

$$f(6) = 1 = a_3 \cdot 6^3 + a_2 \cdot 6^2 + a_1 \cdot 6 + a_0$$

Rovnice odčítame a dosadíme za áčka:

$$-5 = 152a_3 + 20a_2 + 2a_1$$

$$-5 = 152 \cdot \frac{k}{3} + 20 \cdot (-5k) + 2 \cdot 24k$$

$$-5 = \frac{4}{3}k$$

$$k = \frac{15}{4}$$

Dosadením dostávame:

$$a_3 = \frac{k}{3} = \frac{5}{4}$$

$$a_2 = -5k = -\frac{75}{4}$$

$$a_1 = 24k = 90$$

$$6 = a_3 \cdot 4^3 + a_2 \cdot 4^2 + a_1 \cdot 4 + a_0$$

$$6 = 80 - 300 + 360 + a_0$$

$$a_0 = -134$$

## **MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY**

### ***MATURITNÝ OKRUH 10: POLYNOMICKÉ FUNKCIE***

Funkcia spĺňajúca podmienky je teda:  $f(x) = \frac{5}{4}x^3 - \frac{75}{4}x^2 + 90x - 134$ .