Používanie materiálov zo ZONES.SK je povolené bez obmedzení iba na osobné účely a akékoľvek verejné publikovanie je bez predchádzajúceho súhlasu zakázané.

Autor: Martin Slota

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 8: POSTUPNOSTI

1. príklad (92/Pr. 3)

Zadanie: V banke si zoberieme pôžičku k Sk. Mesačne splácame s Sk, pričom splácame aj mesačný úrok p %. (p je dvanástina ročného úroku). Koľko mesiacov budeme pôžičku splácať?

Riešenie:

Nech a_n je obnos, ktorý ešte treba splatiť po n mesiacoch.

Po prvom mesiaci: $a_1 = k - s + \frac{p}{100} \cdot k = k \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) - s$

Po druhom mesiaci: $a_2 = a_1 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) - s = k \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 - s \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) - s$

Po treťom mesiaci: $a_3 = a_2 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) - s = k \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^3 - s \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 - s \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) - s$

Po $n -$ tom mesiaci:

$$a_n = k \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n - s \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{n-1} - s \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{n-2} - \ldots - s \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) - s =$$

$$= k \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n - s \cdot \left[\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{n-1} + \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{n-2} + \ldots + \left(1 + \frac{p}{100}\right) + 1\right] =$$

$$= k \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n - s \cdot 1 \cdot \frac{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n - 1}{\left(1 + \frac{p}{100}\right) - 1} = k \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n - \frac{100 \cdot s}{p} \cdot \left[\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n - 1\right] =$$

$$= \left(k - \frac{100 \cdot s}{p}\right) \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n + \frac{100 \cdot s}{p}$$

Nech x je počet mesiacov, po ktorých bude pôžička splatená. Potom platí:

$$a_x = 0 = \left(k - \frac{100 \cdot s}{p}\right) \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^x + \frac{100 \cdot s}{p} \Rightarrow \frac{100 \cdot s}{p} = -\left(k - \frac{100 \cdot s}{p}\right) \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{100 \cdot s}{p} = \left(\frac{100 \cdot s - pk}{p}\right) \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^x \Rightarrow 100 \cdot s = (100 \cdot s - pk) \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{100 \cdot s}{100 \cdot s - pk} = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^x$$

$\left(1 + \frac{p}{100}\right)^x > 0 \Rightarrow \frac{100 \cdot s}{100 \cdot s - pk} > 0 \Rightarrow 100 \cdot s - pk > 0 \Rightarrow s > \frac{p \cdot k}{100}$ (iba pri takomto s má zmysel – pri nižšom s nikdy pôžičku nesplatíme)

Ďalej upravujeme, aby sme vypočítali x:

Zdroj: http://www.zones.sk

Používanie materiálov zo ZONES.SK je povolené bez obmedzení iba na osobné účely a akékoľvek verejné publikovanie je bez predchádzajúceho súhlasu zakázané.

Autor: Martin Slota

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 8: POSTUPNOSTI

$$\frac{100\cdot s}{100\cdot s-pk}=\left(1+\frac{p}{100}\right)^x\Rightarrow \ln\frac{100\cdot s}{100\cdot s-pk}=x\cdot\ln\left(1+\frac{p}{100}\right)\Rightarrow x=\frac{\ln(100\cdot s)-\ln(100\cdot s-pk)}{\ln\left(1+\frac{p}{100}\right)}$$

Pôžičku splatíme o $\frac{\ln(100\cdot s)-\ln(100\cdot s-pk)}{\ln\left(1+\frac{p}{100}\right)}$ mesiacov za predpokladu, že $s>\frac{p\cdot k}{100}$.

2. príklad (94/8)

Zadanie: Dĺžky strán pravouhlého trojuholníka tvoria tri po sebe idúce členy aritmetickej postupnosti. Určte ich veľkosť, ak viete, že polomer kružnice vpísanej do trojuholníka je 7 cm.

Riešenie:

Z obrázku vyplýva, že $a=x+7$, $b=y+7$ a $c=x+y$.

Keďže dĺžky strán trojuholníka tvoria tri po sebe idúce členy aritmetickej postupnosti s diferenciou d, platí: $b-a=d=c-b\Rightarrow(y+7)-(x+7)=(x+y)-(y+7)\Rightarrow y-x=x-7\Rightarrow \underline{y=2x-7}$.

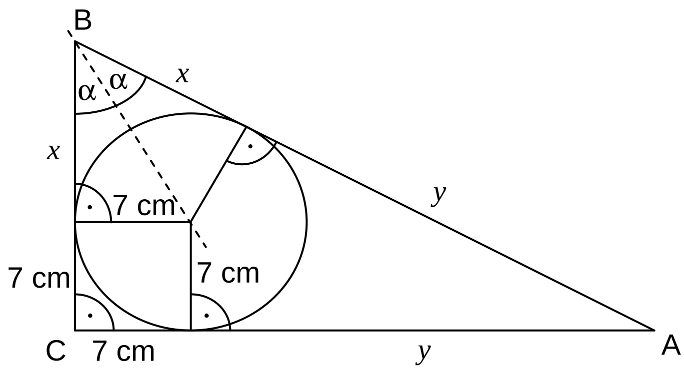
Dosadením do Pytagorovej vety dostávame:

$$(x+7)^2+(2x-7+7)^2=(x+2x-7)^2\Rightarrow x^2+14x+49+4x^2=9x^2-21x-21x+49\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 5x^2+14x+49=9x^2-42x+49\Rightarrow 4x^2-56x=0\Rightarrow 4x\cdot(x-14)=0\Rightarrow \underline{x=0\vee x=14}$$

Pre $x=0$ je $c=-7$, čo je očividný nezmysel, a preto zostáva iba jedno riešenie:

$\underline{\underline{a}}=14+7=\underline{\underline{21}}$, $\underline{\underline{b}}=28-7+7=\underline{\underline{28}}$ a $\underline{\underline{c}}=14+28-7=\underline{\underline{35}}$.

Dĺžky strán pravouhlého trojuholníka s polomerom vpísanej kružnice 7 cm, ktoré tvoria aritmetickú postupnosť sú 21 cm, 28 cm a 35 cm.



3. príklad (94/12)

Zadanie: V aritmetickej postupnosti je $a_2+a_4=24$ a $a_3:a_7=3:8$. Určte a_{15}.

Riešenie:

Nech d je diferencia danej postupnosti. Potom platí :

$$24=a_2+a_4=a_1+d+a_1+3d=2\cdot(a_1+2d)\Rightarrow a_1+2d=12\Rightarrow \underline{a_3=12}$$

$$a_7=\frac{8}{3}\cdot 12=32$$

$$d=\frac{a_7-a_3}{4}=5$$

Používanie materiálov zo ZONES.SK je povolené bez obmedzení iba na osobné účely a akékoľvek verejné publikovanie je bez predchádzajúceho súhlasu zakázané.
Autor: Martin Slota

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 8: POSTUPNOSTI

$\underline{\underline{a_{15}}} = a_7 + 8d = 32 + 40 = \underline{\underline{72}}$

4. príklad (95/17)

Zadanie: Dokážte, že postupnosť $\left\{\sqrt{\log(n^2+1)-\log(n+1)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca.

Dôkaz (priamy):

pozn.: Dôkaz prevedieme tak, že budeme z dokazovaného tvrdenia odvádzať ďalšie tvrdenia, až prídeme k zrejmému tvrdeniu. Potom celú úvahu „otočíme“ a dostávame dôkaz dokazovaného tvrdenia. Pri takýchto dôkazoch si musíme dávať pozor, aby všetky úpravy dokazovaného tvrdenia boli bez problémov „obrátiteľné“. Tu bude dôkaz zapísaný rovno s ekvivalenciami – pri robení takýchto dôkazov píšeme najprv píšeme iba implikácie v smere úvahy a potom overujeme ich „obrátiteľnosť“ a dopisujeme ekvivalencie. Dík za pozornosť.

$\left\{\sqrt{\log(n^2+1)-\log(n+1)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca $\Leftrightarrow \forall n \in N; \sqrt{\log((n+1)^2+1)-\log(n+2)} > \sqrt{\log(n^2+1)-\log(n+1)} \Leftrightarrow$

$\underset{\text{pom. tvrdenie}}{\Leftrightarrow} \forall n \in N; \log((n+1)^2+1)-\log(n+2) > \log(n^2+1)-\log(n+1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall n \in N; \log(n^2+2n+2)+\log(n+1) > \log(n^2+1)+\log(n+2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall n \in N; \log((n^2+2n+2)\cdot(n+1)) > \log((n^2+1)\cdot(n+2)) \underset{\log x \text{ je rast.}}{\Leftrightarrow}$

$\underset{\log x \text{ je rast.}}{\Leftrightarrow} \forall n \in N; n^3+2n^2+2n+n^2+2n+2 > n^3+n+2n^2+2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall n \in N; n^2+3n > 0$, čo je zrejmé tvrdenie $\Rightarrow$ dôkaz je dokončený.

Pomocné tvrdenie:

Aby sme mohli zapísať spätnú implikáciu pri ekvivalencii s nápisom „pom. tvrdenie“, musíme najskôr dokázať, že obe strany nerovnice sú kladné (aby sa dali odmocniť). Keďže ľavá strana je väčšia než pravá, stačí, aby sme dokázali, že $\forall n \in N; \log(n^2+1)-\log(n+1) = \log\left(n - \frac{n-1}{n+1}\right) \geq 0$.

Dôkaz (priamy):

Ak $n = 1 \Rightarrow \log(n^2+1)-\log(n+1) = \log 2 - \log 2 = 0 \geq 0$

Ak $n \in N - \{1\} \Rightarrow \log(n^2+1)-\log(n+1) = \log\left(\frac{n^2+1}{n+1}\right) = \log\left(n - \frac{n-1}{n+1}\right)$

Keďže platí $\forall x \in N; \frac{x-1}{x+1} \in (0,1)$ a funkcia $y = \log x$ je rastúca, platí aj:

$\forall n \in N - \{1\}; \log\left(n - \frac{n-1}{n+1}\right) > \log(n-1) \geq 0$

5. príklad (95/21)

Zadanie: Polčas premeny rádioaktívnej látky je čas, za ktorý sa polovica jej pôvodného množstva premení na rozpadové produkty. Aký vek má archeologický nález, ak sa v spoločnej vrstve s ním našlo $2{,}1\ g$ rádioaktívneho uhlíka s polčasom premeny 5570 rokov a $300\ g$ rozpadových produktov? (Úbytok hmotnosti spôsobený žiarením pri premene zanedbajte.)

Riešenie:

Používanie materiálov zo ZONES.SK je povolené bez obmedzení iba na osobné účely a akékoľvek verejné publikovanie je bez predchádzajúceho súhlasu zakázané.
Autor: Martin Slota

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 8: POSTUPNOSTI

$T = 5570$ r.

$m_0 = 302{,}1\ g$

$m(t) = 2{,}1\ g$

$t = ?$

$m(t)$ – hmotnosť po t rokoch

$$m(T) = \frac{1}{2} \cdot m_0$$

$$m(2T) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot m_0$$

$$m(3T) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot m_0$$

$$m(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} \cdot m_0 \Rightarrow \frac{m(t)}{m_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} \Rightarrow \log\frac{m(t)}{m_0} = \frac{t}{T} \cdot \log\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{t}} = \frac{T \cdot (\log m(t) - \log m_0)}{\log 1 - \log 2} = \frac{T}{\log 2} \cdot (\log m_0 - \log m(t)) = \frac{5570}{\log 2} \cdot (\log 302{,}1 - \log 2{,}1) \doteq \underline{\underline{39900\ \text{r.}}}$$

Archeologický nález je približne 39900 rokov starý.