Autor: Martin Slota

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 21: PRAVDEPODOBNOSŤ

1. príklad (227/Pr. 2)

Zadanie: Hráči A, B, C hádžu mincou v abecednom poradí. Vyhráva ten, komu prvému padne lev. Ak nepadne žiadnemu lev v prvom hode, pokračuje sa druhými hodmi atď. Hra sa končí v tej chvíli, keď padne prvý lev. Určte pravdepodobnosť výhry hráča A.

Riešenie:

Označme A_i, že prvý lev padol hráčovi A v $i-$tom kole hodov (Pravdepodobnosť javu A_2 je potom rovná pravdepodobnosti, že v prvom kole padne všetkým hlava a v druhom kole padne hráčovi A lev, teda $\left(1-\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \left(\frac{1}{2}\right)^4$. Pravdepodobnosť javu A_3 je potom rovná pravdepodobnosti, že v prvých dvoch kolách padne všetkým hlava a v treťom kole padne hráčovi A lev, teda $\left(1-\frac{1}{2}\right)^6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \left(\frac{1}{2}\right)^7$ atď.)

Hľadaná pravdepodobnosť je potom:

$$P = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^7 + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{1+3i} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \underline{\underline{\frac{4}{7}}}.$$

2. príklad (230/2)

Zadanie: Z čísel $1,2,3,\ldots,100$ náhodne vyberieme tri. Aká je pravdepodobnosť, že jedno z nich je aritmetickým priemerom ostatných?

Riešenie:

Pravdepodobnosť výberu „dobrej“ trojice čísel sa rovná podielu počtu všetkých možných „dobrých“ trojíc a počtu všetkých trojíc. Počet všetkých trojíc je vlastne počtom možností náhodného výberu troch čísel zo sto, teda $\binom{100}{3}$.

Počet priaznivých trojíc vypočítame takto: Vyberieme si náhodne prvé číslo (možností výberu je 100). Potom k nemu musíme zadovážiť ďalšie číslo tak, aby sa z nich dal urobiť prirodzený aritmetický priemer. Máme iba jedno obmedzenie – aby súčet čísel bol párny, a preto musíme k párnemu číslu vybrať párne resp. k nepárnemu nepárne. Možností výberu druhého čísla je teda 49. Tretie číslo musí byť priemerom predchádzajúcich dvoch, možnosť výberu je teda práve 1. Celý počet ešte musíme predeliť 2!, pretože je jedno, v akom poradí budeme prvé dve čísla ťahať.

Celkovo je pravdepodobnosť teda $P = \frac{\frac{100 \cdot 49 \cdot 1}{2!}}{\binom{100}{3}} = \frac{50 \cdot 49}{98 \cdot 50 \cdot 33} = \underline{\underline{\frac{49}{98 \cdot 33} = 0{,}15}}.$

Autor: Martin Slota

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 21: PRAVDEPODOBNOSŤ

3. príklad (230/5)

Zadanie: Test obsahuje desať otázok, ku každej sú štyri možné odpovede, práve jedna je správna. Na absolvovanie skúšky treba správne odpovedať aspoň na päť otázok. Aká je pravdepodobnosť, že úplne nepripravený uchádzač urobí skúšku?

Riešenie:

Pravdepodobnosť, že úplne nepripravený uchádzač urobí skúšku je rovná súčtu pravdepodobností, že uhádne práve 5, 6, ..., 10 otázok.

Pravdepodobnosť, že úplne nepripravený uchádzač uhádne práve 5 otázok vypočítame, keď najprv z desiatich otázok vyberieme 5, ktoré uhádne a toto číslo vynásobíme pravdepodobnosťami, že naozaj vybraných päť otázok uhádne a zároveň, že zvyšných päť neuhádne. Je to teda $\binom{10}{5}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^5\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^5$.

Ostatné čiastkové pravdepodobnosti sa dajú vypočítať obdobne.

Celková pravdepodobnosť teda je $P=\binom{10}{5}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^5\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^5+\binom{10}{6}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^6\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^4+\binom{10}{7}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^7\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3+$ $\binom{10}{8}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^8\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2+\binom{10}{9}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^9\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^1+\binom{10}{10}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{10}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^0=0{,}078$.

4. príklad (231/8)

Zadanie: V Mototechne ponúkajú zákazníkom dva modely automobilov Škoda. Majú k dispozícii 20 kusov Š 105 a 30 kusov Š120. Pravdepodobnosť poruchy Š 105 je 0,004, na Š 120 je 0,005.

a) Aká je pravdepodobnosť, že náhodne vybratý kus bude mať poruchu?

b) Aká je pravdepodobnosť, že poruchový kus bude Š 105?

Riešenie:

Kedysi sme sa naučili: Pravdepodobnosť, že nastane jav A za predpokladu, že nastal jav B je $P(A\setminus B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$. Tento poznatok teraz využijeme v príklade.

a) P(náhodne vybraný kus bude mať poruchu) = P(porucha a Š 105) + P(porucha a Š 120) = = P(porucha \ Š 105) . P(Š 105) + P(porucha \ Š 120) . P(Š 120) = $0{,}004\cdot\frac{20}{50}+0{,}005\cdot\frac{30}{50}=\underline{\underline{0{,}0046}}$

Zopakujeme si ešte jeden vzťah: $P(B\setminus A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}\cdot\frac{P(B)}{P(B)}=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\cdot\frac{P(B)}{P(A)}=P(A\setminus B)\cdot\frac{P(B)}{P(A)}$.

b) P(Š 105 \ poruchová) = P(poruchová \ Š 105) $\cdot\frac{P(\text{Š }105)}{P(\text{poruchová})}=0{,}004\cdot\frac{0{,}4}{0{,}0046}=\underline{\underline{0{,}3478}}$

5. príklad (231/9)

Zadanie: Vieme, že v rodine sú štyri deti, najstaršie je dievča. Vypočítajte pravdepodobnosť, že v rodine sú dvaja chlapci a dve dievčatá.

Riešenie:

Priaznivé možnosti máme tri: že sa po prvom dievčati (dané) narodia

Autor: Martin Slota

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 21: PRAVDEPODOBNOSŤ

a) najprv dvaja chlapci a potom dievča
b) najprv dievča a potom dvaja chlapci
c) najprv chlapec, potom dievča a potom ešte jeden chlapec

Všetkých možností je 2^3.

Pravdepodobnosť je teda $P = \frac{3}{2^3} = \underline{\underline{\frac{3}{8}}}$.