Autor: Martin Slota

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 20: ŠTATISTIKA

1. príklad (220/Pr. 2)

Zadanie: Dokážte, že rozptyl $s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\overline{x}\right)^2$.

Dôkaz (priamy):

Podľa definície $s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2$. Teda

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2 - 2x_i\overline{x} + \left(\overline{x}\right)^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\overline{x}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\overline{x}\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\overline{x}\,\overline{x} + \frac{1}{n}n\left(\overline{x}\right)^2 = \underline{\underline{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\overline{x}\right)^2}}$$

ČBTD.

2. príklad (222/1)

Zadanie: Nech y je znak, ktorý dostaneme zo znaku x pomocou rovnosti $y = 2x + 3$. Dokážte, že $\overline{y} = 2\overline{x} + 3,\ \mathrm{mod}(y) = 2\cdot\mathrm{mod}(x) + 3,\ \mathrm{med}(y) = 2\cdot\mathrm{med}(x) + 3,\ s(y) = 2\cdot s(x),\ r_{xy} = 1$.

Dôkaz (priamy):

Nech $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sú hodnoty štatistického súboru $\left(x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n\right)$ a nech platí $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\};\ y_i = 2x_i + 3$. Potom

1. $\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(2x_i + 3) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 2x_i + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 3 = 2\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{3n}{n} = \underline{\underline{2\overline{x} + 3}}$ ČBTD.
2. $\mathrm{mod}(y)$:
   Je to najčastejšie sa vyskytujúca hodnota znaku y. Keďže znaky x a y spolu priamo súvisia, musí sa rovnať najčastejšie sa vyskytujúcej hodnote znaku x vynásobenej dvomi a sčítanej s tromi, čiže $\mathrm{mod}(y) = 2\cdot\mathrm{mod}(x) + 3$ ČBTD.
3. $\mathrm{med}(y)$:
   Keďže funkcia, ktorá priraďuje hodnotu znaku y je prostá, tak stredná hodnota z postupnosti $x_1, x_2, \ldots, x_n$ priamo určí aj prostrednú hodnotu postupnosti $y_1, y_2, \ldots, y_n$, čiže $\mathrm{med}(y) =$ $= 2\cdot\mathrm{med}(x) + 3$ ČBTD.
4. $s_y = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \overline{y}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(2x_i - 3 - \left(2\overline{x} + 3\right)\right)^2} = \sqrt{4\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2} = 2\cdot\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2} = \underline{\underline{2s_x}}$
   ČBTD.
5. $r_{xy} = \dfrac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)\left(y_i - \overline{y}\right)}{s_x s_y} = \dfrac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)\left(2x_i + 3 - \left(2\overline{x} + 3\right)\right)}{s_x\cdot 2s_x} = \dfrac{2\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)\left(x_i - \overline{x}\right)}{s_x\cdot 2s_x} = \dfrac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}{s_x^2} =$
   $= \frac{s_x^2}{s_x^2} = \underline{\underline{1}}$ ČBTD.

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 20: ŠTATISTIKA

3. príklad (222/2)

Zadanie: Dokážte, že mimo intervalu $\left(\bar{x}-3s;\bar{x}+3s\right)$ sa nachádza najviac devätina členov postupnosti $x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n$.

Dôkaz (priamy):

Nech $x_1,x_2,\ldots,x_n$ sú hodnoty štatistického súboru, pričom $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ a $s=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2}$. Nech množina A je množinou všetkých takých indexov $i\in\{1,2,\ldots,n\}$, pre ktoré platí, že hodnota x_i je mimo intervalu $\left(\bar{x}-3s;\bar{x}+3s\right)$. Potom platí:

$$\forall i\in A; \left|x_i-\bar{x}\right|\geq 3s \Rightarrow \left(x_i-\bar{x}\right)^2\geq 9s^2 \Rightarrow \left(\left(\sum_{\text{cez } \forall i\in A}\left(x_i-\bar{x}\right)^2\geq\sum_{\text{cez } \forall i\in A}9s^2\right)\wedge\left(\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2=ns^2\geq\sum_{\text{cez } \forall i\in A}\left(x_i-\bar{x}\right)^2\right)\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow ns^2\geq|A|\cdot 9s^2\Rightarrow \underline{\underline{|A|\leq\frac{n}{9}}}$$

Keďže $|A|\leq\frac{n}{9}$, tak platí aj, že najviac devätina členov postupnosti $x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n$ sa nachádza mimo intervalu $\left(\bar{x}-3s;\bar{x}+3s\right)$ ČBTD.

4. príklad (222/4)

Zadanie: Dokážte, že pre koeficient korelácie r_{xy} platí $\left|r_{xy}\right|\leq 1$.

Dôkaz (priamy):

Nech $x_1,x_2,\ldots,x_n$ sú hodnoty štatistického súboru pre znak x, pričom $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i, s_x=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)}$.

Nech $y_1,y_2,\ldots,y_n$ sú hodnoty štatistického súboru pre znak x, pričom $\bar{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i, s_y=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\bar{y}\right)}$.

Zároveň uvažujme vektory $\vec{x}=\left[x_1-\bar{x},x_2-\bar{x},\ldots,x_n-\bar{x}\right]$ a $\vec{y}=\left[y_1-\bar{y},y_2-\bar{y},\ldots,y_n-\bar{y}\right]$. Pre koeficient korelácie potom podľa definície platí:

$$r_{xy}=\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)\left(y_i-\bar{y}\right)}{s_x\cdot s_y}=\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)\left(y_i-\bar{y}\right)}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\bar{y}\right)^2}}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)\left(y_i-\bar{y}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\bar{y}\right)^2}}=$$

$$=\frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{\left|\vec{x}\right|\cdot\left|\vec{y}\right|}=\cos\left(\angle\vec{x},\vec{y}\right)\in\left\langle-1,1\right\rangle\Rightarrow\underline{\underline{\left|r_{xy}\right|\leq 1}}$$ ČBTD.

Autor: Martin Slota

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 20: ŠTATISTIKA

5. príklad (nie je v MK)

Zadanie: Daná je tabuľka absolútnych početností hodnôt známok žiakov z predmetov slovenský jazyk a matematika. Zistite vzájomnú závislosť týchto známok u žiakov.

M \ Sj	1	2	3
1	6	8	1
2	4	7	1
3	-	-	1

Riešenie:

Najprv si trochu doplníme tabuľku:

M \ Sj	1	2	3	n_{iM}
1	6	8	1	15
2	4	7	1	12
3	-	-	1	1
n_{iS}	10	15	3	n = 28

Nech známka z matematiky je znak x a známka zo slovenčiny je znak y. Vypočítajme teda koeficient korelácie znakov x a y.

Matematika:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{k} x_i^* \cdot n_{iM} = \frac{1}{28} \cdot (1 \cdot 15 + 2 \cdot 12 + 3 \cdot 1) = 1{,}5$$

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{k} \left(x_i^* - \bar{x}\right)^2 \cdot n_{iM}} = \sqrt{\frac{1}{28} \cdot \left((1-1{,}5)^2 \cdot 15 + (2-1{,}5)^2 \cdot 12 + (3-1{,}5)^2 \cdot 1\right)} \doteq 0{,}57$$

Slovenčina:

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{k} y_i^* \cdot n_{iS} = \frac{1}{28} \cdot (1 \cdot 10 + 2 \cdot 15 + 3 \cdot 3) = 1{,}75$$

$$s_y = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{k} \left(y_i^* - \bar{y}\right)^2 \cdot n_{iS}} = \sqrt{\frac{1}{28} \cdot \left((1-1{,}75)^2 \cdot 10 + (2-1{,}75)^2 \cdot 15 + (3-1{,}75)^2 \cdot 3\right)} \doteq 0{,}63$$

$$r_{xy} = \frac{k}{s_x \cdot s_y} \doteq \frac{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{0{,}57 \cdot 0{,}63} =$$

$$= \frac{6 \cdot (1-1{,}5) \cdot (1-1{,}75) + 8 \cdot (1-1{,}5) \cdot (2-1{,}75) + 1 \cdot (1-1{,}5) \cdot (3-1{,}75) + 4 \cdot (2-1{,}5) \cdot (1-1{,}75) + 7 \cdot (2-1{,}5) \cdot (2-1{,}75) + 1 \cdot (2-1{,}5) \cdot (3-1{,}75) + 1 \cdot (3-1{,}5) \cdot (3-1{,}75)}{28 \cdot 0{,}57 \cdot 0{,}63} \doteq 0{,}249$$

Keďže platí $|r_{xy}| \leq 0{,}3$, tak lineárna závislosť medzi známkami z matematiky a slovenského jazyka je slabá.