Autor: Martin Slota

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 27: TELESÁ, ICH OBJEMY A POVRCHY

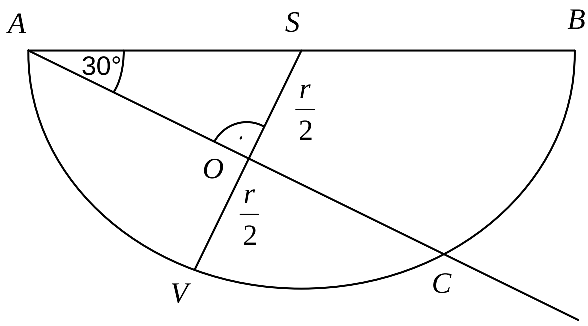
1. príklad (283/Pr. 1)

Zadanie: Polguľovitá nádoba je naplnená vodou. Ak ju nakloníme o 30°, vyte čie z nej 11 litrov vody. Koľko litrov vody zostane v nádobe?

Riešenie:

Označme polomer gule r a body A, B, C, S, O, V podľa obrázka. V trojuholníku ASO platí: $\sin 30° = \frac{|SO|}{r} \Rightarrow |SO| = \frac{r}{2}$. Preto aj $|OV| = \frac{r}{2}$, a to je výška odseku, ktorého objem hľadáme (po otočení nádoby mohla voda zostať iba v ňom). Jeho objem teda je :

$$V = \frac{1}{3}\pi v^2 (3r - v) = \frac{1}{3}\pi \frac{r^2}{4}\left(3r - \frac{r}{2}\right) = \underline{\frac{5}{24}\pi r^3}$$



Aby sme tento objem dopočítali , potrebujeme ešte vyjadriť polomer r. Objem polgule je:

$$\frac{2}{3}\pi r^3 = 11 + \frac{5}{24}\pi r^3 \Rightarrow \frac{11}{24}\pi r^3 = 11 \Rightarrow r^3 = \underline{\frac{24}{\pi}}$$

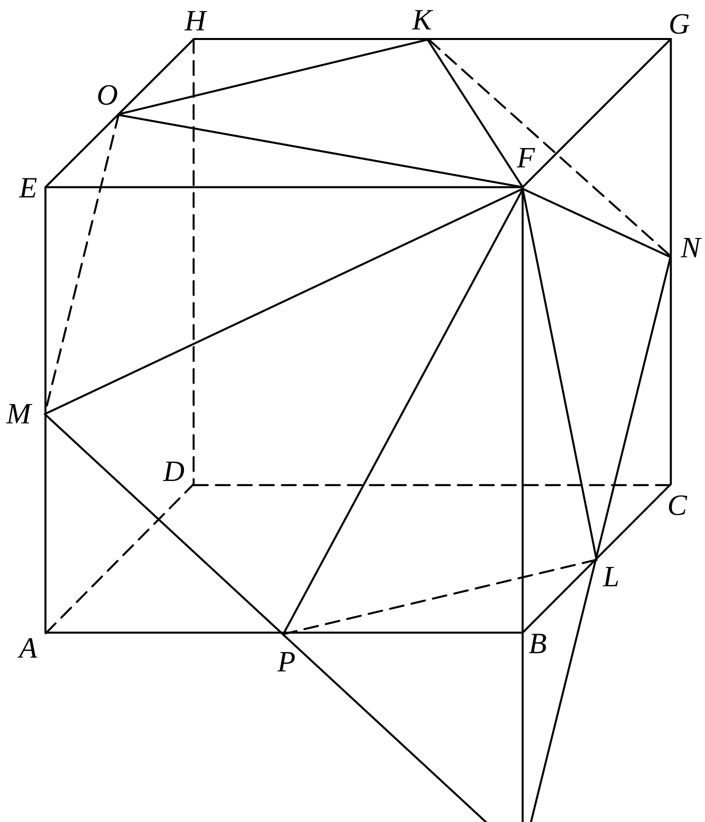
Teraz dosadíme vyjadrenie polomeru do vzorca pre objem: $V = \frac{5}{24}\pi \cdot \frac{24}{\pi} = \underline{\underline{5}}$. V nádobe teda ostane 5 litrov vody.

2. príklad (287/10)

Zadanie: Je daná kocka $ABCDEFGH$ so stranou dĺžky a. Nech M je stred AE, N je stred CG, P je stred AB. Vypočítajte objem a povrch ihlana, ktorého podstava je rez kocky rovinou MNP a hlavný vrchol F.

Riešenie:

Najprv zostrojíme rez kocky rovinou MNP. Body M a P patria jednej stene kocky, ich spojnica je teda časťou rezu. Zostrojíme ešte bod $L\left(\overleftrightarrow{MP} \cap \overleftrightarrow{BFC} = \overleftrightarrow{MP} \cap \overleftrightarrow{ABF} \cap \overleftrightarrow{BFC} = \right.$ $= \overleftrightarrow{MP} \cap \overleftrightarrow{BF} = \{X\}; \{L\} = NX \cap BC\left.\right)$. Pomocou rovnobežnosti zostrojíme zvyšok rezu (pozri obr.). Rezom je teda pravidelný šesťuholník $MPLNKO$ so stranou $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ (jeho pravidelnosť sa dá dokázať cez zhodnosť trojuholníkov AMP, BXP, BXL, CNL).



Autor: Martin Slota

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 27: TELESÁ, ICH OBJEMY A POVRCHY

Aby sme vypočítali objem ihlana, musíme najprv poznať jeho výšku. Keďže rovina MNP delí telesovú uhlopriečku kocky DF na polovice (pozri príklad 2 v téme 26 Stereometria), tak výška ihlana je $v=\frac{\sqrt{3}a}{2}$. Objem je teda:

$$V=\frac{1}{3}S_P\cdot v=\frac{1}{3}\cdot 6\cdot\frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{\frac{2a^2}{4}-\frac{2a^2}{16}}}{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{\frac{6a^2}{16}}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a^3\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}}{16}=\underline{\underline{\frac{3a^3}{8}}}$$

Povrch ihlana je:

$$P=S_P+6\cdot S_{\Delta MPF}=3\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{\frac{6a^2}{16}}+6\cdot\left(a^2-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2-a\cdot\frac{a}{2}\right)=\frac{6a\sqrt{3}a}{8}+6\cdot\left(\frac{a^2}{2}-\frac{a^2}{8}\right)=$$

$$\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}+\frac{9a^2}{4}=\underline{\underline{\frac{3a^2\left(3+\sqrt{3}\right)}{4}}}$$

3. príklad (287/12)

Zadanie: Guli s polomerom $r=14$ je vpísaný kváder, ktorého rozmery sú v pomere $1:2:3$. Vypočítajte pomer objemov kvádra a gule.

Riešenie:

Nech a,b,c sú strany kvádra.

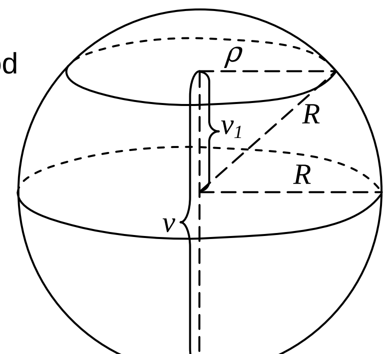
Potom telesová uhlopriečka kvádra $=2r=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{a^2+4a^2+9a^2}=\sqrt{14}a\Rightarrow a=\frac{2r}{\sqrt{14}}$

$$\frac{V_{\text{kvádra}}}{V_{\text{gule}}}=\frac{abc}{\frac{4}{3}\pi r^3}=\frac{3\cdot a\cdot 2a\cdot 3a}{4\cdot\pi r^3}=\frac{18a^3}{4\pi r^3}=\frac{9a^3}{2\pi r^3}=\frac{9\cdot 8r^3}{14\sqrt{14}\cdot 2\pi r^3}=\frac{18}{7\sqrt{14}\cdot\pi}=\frac{18\sqrt{14}}{7\cdot 14\cdot\pi}=\underline{\underline{\frac{9\sqrt{14}}{49\pi}}}.$$

4. príklad (296/15)

Zadanie: Guľa, ktorej hlavná kružnica má dĺžku 20 cm, pláva vo vode, pričom je ponorená väčšou časťou svojho objemu. Obvod kruhu, ktorý je podstavou vyčnievajúceho odseku, je 12 cm. Aká je hmotnosť gule?

Riešenie:



Rozmery gule si označíme podľa obrázka. Zo vzorca pre obvod vyjadríme R a ρ:

Autor: Martin Slota

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 27: TELESÁ, ICH OBJEMY A POVRCHY

$$2\pi\rho = 12\ cm \Rightarrow \rho = \frac{6}{\pi}\ cm$$

$$2\pi R = 20\ cm \Rightarrow R = \frac{10}{\pi}\ cm$$

Aby sme mohli vypočítať hmotnosť gule, potrebujeme najprv poznať objem vody, ktorú vytlačila (Archimedov zákon), a teda vlastne objem ponorenej časti gule. Na výpočet objemu zase potrebujeme výšku ponorenej časti gule:

$$v = R + v_1 = R + \sqrt{R^2 - \rho^2} = \left(\frac{10}{\pi} + \sqrt{\frac{100}{\pi^2} - \frac{36}{\pi^2}}\right) cm = \left(\frac{10}{\pi} + \frac{8}{\pi}\right) cm = \underline{\frac{18}{\pi}\ cm}$$

Teraz vypočítame objem ponorenej časti gule, ktorý má tvar guľového odseku:

$$V = \frac{\pi \cdot v}{6} \cdot \left(3\rho^2 + v^2\right) = \frac{\pi \cdot \frac{18}{\pi}}{6} \cdot \left(3\frac{36}{\pi^2} + \frac{18^2}{\pi^2}\right) = 3 \cdot 18 \cdot \left(\frac{6+18}{\pi^2}\right) = \frac{3 \cdot 18 \cdot 24}{\pi^2} \doteq \underline{131{,}31\ cm^3}$$

Hmotnosť gule je rovnaká ako hmotnosť vody, ktorú vytlačila, a keďže poznáme objem aj hustotu tejto vody, môžeme vypočítať hmotnosť gule:

$$m = \rho_{H_2O} \cdot V = 1\ g.cm^{-3} \cdot 131{,}31\ cm^3 = \underline{\underline{131{,}31\ g}}$$

Guľa má hmotnosť $131{,}31\ g$.

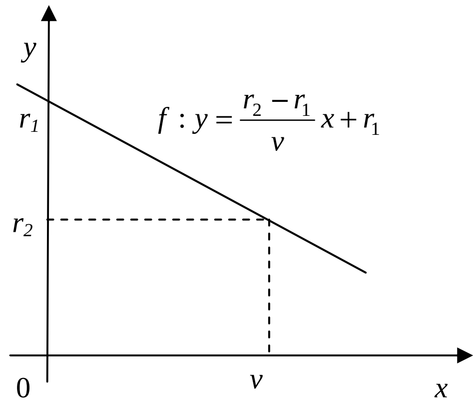
5. príklad (nie je v MK)

Zadanie: Odvoďte vzorec pre objem zrezaného kužeľa, ak poznáte jeho výšku v a polomery jeho podstáv $r_1, r_2\ (r_1 > r_2)$.

Riešenie:

Najprv si odvodíme predpis funkcie, ktorej rotáciou okolo osi x vznikne zrezaný kužeľ:

Predpis si zadáme takto: $f: y = kx + q$. Zároveň vieme, že ho musia spĺňať body $[0, r_1], [v, r_2]$. Po dosadení prvého bodu dostávame $q = r_1$ a po dosadení druhého bodu vieme aj, že $k = \frac{r_2 - r_1}{v}$. Predpis funkcie je teda $f: y = \frac{r_2 - r_1}{v}x + r_1$.



Pre výpočet objemu teraz použijeme vzorec:

$$V = \pi\int_0^v f^2(x)dx = \pi\int_0^v \left(\frac{r_2 - r_1}{v}x + r_1\right)^2 dx = \pi\int_0^v \left(\frac{(r_2 - r_1)^2}{v^2}x^2 + \frac{2 \cdot (r_2 - r_1) \cdot r_1}{v}x + r_1^2\right) dx =$$

$$= \pi \cdot \left[\frac{(r_2 - r_1)^2}{v^2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{2 \cdot (r_2 - r_1) \cdot r_1}{v} \cdot \frac{x^2}{2} + r_1^2 x\right]_0^v = \pi \cdot \left(\frac{(r_2 - r_1)^2}{v^2} \cdot \frac{v^3}{3} + \frac{2 \cdot (r_2 - r_1) \cdot r_1}{v} \cdot \frac{v^2}{2} + r_1^2 v\right) =$$

$$= \pi \cdot \left(\frac{(r_2 - r_1)^2 v}{3} + (r_2 - r_1) \cdot r_1 v + r_1^2 v\right) = \pi \cdot \frac{r_1^2 v - 2r_1 r_2 v + r_2^2 v + 3r_1 r_2 v - 3r_1^2 v + 3r_1^2 v}{3} =$$

$$= \underline{\underline{\frac{\pi \cdot v}{3} \cdot \left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right)}}$$