Autor: Martin Slota

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 4: TEÓRIA ČÍSEL

1. príklad (43/Pr. 1)

Zadanie: Dokážte, že prvočísel je nekonečne veľa.

Dôkaz (sporom):

Predpokladajme, že by prvočísel bolo konečne veľa a označme ich $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Utvorme číslo $P = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k + 1$. Keďže zrejme $P > p_i \left(i \in \{1, 2, \ldots, k\}\right)$, nemôže byť (podľa predpokladu) prvočíslom. Musí teda byť zloženým číslom, a teda deliteľné nejakým prvočíslom. Číslo P však nemôže byť deliteľné žiadnym z čísel $p_i \left(i \in \{1, 2, \ldots, k\}\right)$, pretože pri delení každým dáva zvyšok 1. To je spor, a teda predpoklad, že prvočísel je len konečne veľa, bol nesprávny a platí pôvodný výrok ČBTD.

2. príklad (46/4)

Zadanie: Nájdite prirodzené číslo n také, že súčin všetkých jeho deliteľov sa rovná

a) $3^{30} \cdot 5^{40}$

b) 5832

Riešenie:

a) Urobíme si tabuľku všetkých deliteľov čísla $n = 3^x \cdot 5^y$:

	3^0	3^1	3^2	…	3^x
5^0	$3^0 . 5^0$	$3^1 . 5^0$	$3^2 . 5^0$	…	$3^x . 5^0$
5^1	$3^0 . 5^1$	$3^1 . 5^1$	$3^2 . 5^1$	…	$3^x . 5^1$
5^2	$3^0 . 5^2$	$3^1 . 5^2$	$3^2 . 5^2$	…	$3^x . 5^2$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮
5^y	$3^0 . 5^y$	$3^1 . 5^y$	$3^2 . 5^y$	…	$3^x . 5^y$

Teraz vypísané delitele vynásobíme. Začneme s prvým riadkom tabuľky:

$$\left(5^0\right)^{x+1} \cdot \left(3^0 \cdot 3^1 \cdot 3^2 \cdot \ldots \cdot 3^x\right) = \left(5^0\right)^{x+1} \cdot 3^{\frac{x \cdot (x+1)}{2}}$$

Obdobne vynásobíme členy druhého, tretieho a posledného riadku:

2. riadok: $\left(5^1\right)^{x+1} \cdot 3^{\frac{x \cdot (x+1)}{2}}$

3. riadok: $\left(5^2\right)^{x+1} \cdot 3^{\frac{x \cdot (x+1)}{2}}$

⋮

posledný riadok: $\left(5^y\right)^{x+1} \cdot 3^{\frac{x \cdot (x+1)}{2}}$

Teraz ešte vynásobíme všetky riadky a získame tak súčin všetkých deliteľov čísla n:

$$\left[3^{\frac{x \cdot (x+1)}{2}}\right]^{y+1} \cdot \left(5^0 \cdot 5^1 \cdot 5^2 \cdot \ldots \cdot 5^y\right)^{x+1} = 3^{\frac{x \cdot (x+1) \cdot (y+1)}{2}} \cdot 5^{\frac{y \cdot (y+1) \cdot (x+1)}{2}} = 3^{30} \cdot 5^{40}$$

Zostáva doriešiť sústavu dvoch rovníc o dvoch neznámych, ktorá nám zostala:

Autor: Martin Slota

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 4: TEÓRIA ČÍSEL

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x\cdot(x+1)\cdot(y+1)}{2}=30\\ \dfrac{y\cdot(y+1)\cdot(x+1)}{2}=40\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{3}{4}\rightarrow \begin{array}{l}\underline{x=3}\\ \underline{y=4}\end{array}$$

Číslo spĺňajúce vyžadovanú podmienku je $n=3^3\cdot 5^4=\underline{\underline{16875}}$.

b) Najprv musíme rozložiť daný súčin deliteľov na súčin prvočísel: $5832=2^3\cdot 3^6$
Obdobným postupom ako v prípade a) dostávame novú sústavu dvoch rovníc o dvoch neznámych:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x\cdot(x+1)\cdot(y+1)}{2}=3\\ \dfrac{y\cdot(y+1)\cdot(x+1)}{2}=6\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{1}{2}\rightarrow \begin{array}{l}\underline{x=1}\\ \underline{y=2}\end{array}$$

Výsledné číslo je teda $n=2^1\cdot 3^2=\underline{\underline{18}}$

3. príklad (46/14)

Zadanie: Dokážte, že $\forall n\in N;36\mid\left(2n^6-n^4-n^2\right)$

Dôkaz (priamy):

Najprv si upravíme zadaný výraz a označíme ho k:

$$k=2n^6-n^4-n^2=n^2\left(2n^4-n^2-1\right)=n^2\left(n^2-1\right)\left(2n^2+1\right)=n^2(n-1)(n+1)\left(2n^2+1\right)$$

Teraz dokážeme, že výraz je deliteľný 4 aj 9, a teda aj 36.
Deliteľnosť 4:

$$\forall n\in N\,\exists l\in N;\left.\begin{array}{l}n=2l\Rightarrow n^2=4l^2\Rightarrow 4\mid n^2\Rightarrow 4\mid k\\ n=2l-1\Rightarrow(n+1)(n-1)=2l\cdot(2l-2)=4l\cdot(l-1)\Rightarrow 4\mid((n+1)(n-1))\Rightarrow 4\mid k\end{array}\right\}\Rightarrow 4\mid k$$

Deliteľnosť 9:

$$\forall n\in N\,\exists l\in N;\left.\begin{array}{l}n=3l\Rightarrow n^2=9l^2\Rightarrow 9\mid n^2\Rightarrow 9\mid k\\ n=3l-1\Rightarrow(n+1)\left(2n^2+1\right)=3l\cdot\left[2\cdot\left(9l^2-6l+1\right)+1\right]=9l\cdot\left(6l^2-4l+1\right)\Rightarrow 9\mid k\\ n=3l-2\Rightarrow(n-1)\left(2n^2+1\right)=(3l-3)\cdot\left[2\cdot\left(9l^2-12l+4\right)+1\right]=9(l-1)\cdot\left(6l^2-8l+3\right)\Rightarrow 9\mid k\end{array}\right\}$$

$\Rightarrow 9\mid k$

$(4\mid k\wedge 9\mid k)\Rightarrow 36\mid k$ ČBTD.

4. príklad (46/17)

Zadanie: Koľko celočíselných riešení $[x,y]$ takých, že $|x|<100$ a $|y|<100$ má rovnica $(x-y)^2=x+y$?

Riešenie:

Musí nastať jeden z troch prípadov:

1. $x=y\Rightarrow 0=x+x\Rightarrow \underline{x=0}\Rightarrow \underline{y=0}$
2. $x<y\Rightarrow \exists k\in N;y=k+x\Rightarrow(x-k-x)^2=x+k+x\Rightarrow k^2=2x+k\Rightarrow \underline{x=\frac{k(k-1)}{2}}\Rightarrow \underline{y=\frac{k(k+1)}{2}}$

Autor: Martin Slota

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 4: TEÓRIA ČÍSEL

3. $x > y$ – symetrické riešenie ako v 2.

Z prvého prípadu dostávame jedno riešenie. Teraz zistíme, koľko je riešení v druhom prípade:

k	1	2	3	…	13	14
x	0	1	3	…	78	91
y	1	3	6	…	91	105

Z tabuľky vidieť, že existuje 13 riešení (pri $k = 14$ je už $|y| > 100$). Dohromady je teda 27 riešení (jedno z prvého prípadu, 13 z druhého prípadu a 13 z tretieho prípadu).

5. príklad (47/20)

Zadanie: Nájdite všetky riešenia rovnice $1 + x + x^2 + x^3 = 2^y$ v obore nezáporných celých čísel.

Riešenie:

Najprv rovnicu trochu upravíme:

$$(1 + x) + x^2(1 + x) = 2^y$$

$$(x + 1)(x^2 + 1) = 2^y$$

Môže nastať jeden z troch prípadov:

1. $x = 0 \Rightarrow 1 = 2^y \Rightarrow y = 0 \Rightarrow [0,0] \in K$
2. $x \in N \wedge x$ je párne $\Rightarrow$ nepárne $\cdot$ nepárne $= 2^y \Rightarrow \nexists y$
3. $x \in N \wedge x$ je nepárne $\Rightarrow \exists n \in N; x = 2n - 1 \Rightarrow 2n \cdot (4n^2 - 4n + 1 + 1) = 2^y \Rightarrow n \cdot (2n^2 - 2n + 1) = 2^{y-2}$

   Keďže číslo $2n^2 - 2n + 1$ je nepárne, musí byť rovné 1 (inak nedostaneme po roznásobení mocninu dvojky):

   $$2n^2 - 2n + 1 = 1$$

   $$2n \cdot (n - 1) = 0$$

   Keďže $n \in N$, tak: $n = 1 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow 1 = 2^{y-2} \Rightarrow y = 2$

Rovnica má dve riešenia: $K = \{[0,0], [1,2]\}$.