

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 23: TROJUHLNÍK

1. príklad (247/Pr. 1 a)

Zadanie: Rozhodnite, či existuje trojuholník, ktorého výšky majú veľkosť $1, \sqrt{5}, 1 + \sqrt{5}$.

Riešenie:

Keďže platí $S_{\Delta} = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{b \cdot v_b}{2} = \frac{c \cdot v_c}{2} \Rightarrow a : b : c = \frac{1}{v_a} : \frac{1}{v_b} : \frac{1}{v_c}$. Strany trojuholníka by teda museli byť

v pomere $a : b : c = 1 : \frac{1}{\sqrt{5}} : \frac{1}{1 + \sqrt{5}}$ a boli by teda tvaru $a, b = \frac{1}{\sqrt{5}}a, c = \frac{1}{1 + \sqrt{5}}a$. Pre takéto strany však

neplatí trojuholníková nerovnosť: $b + c = \frac{1}{\sqrt{5}}a + \frac{1}{1 + \sqrt{5}}a = 0,756a < a$. Trojuholník s danými veľkosťami výšok teda neexistuje.

2. príklad (249/Pr. 3)

Zadanie: Trojuholník má obsah 32 cm^2 a súčet veľkostí dvoch jeho strán je 16 cm . Určte veľkosť tretej strany.

Riešenie:

Nech $a + b = 16, S = \frac{ab \sin \gamma}{2} = 32$. Keďže $\forall \gamma \in R; \sin \gamma \leq 1$, musí platiť aj $32 = S = \frac{ab \sin \gamma}{2} \leq \frac{ab}{2}$.

Z AG-nerovnosti vyplýva, že $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Rightarrow \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab \Rightarrow \frac{(a+b)^2}{8} \geq \frac{ab}{2}$, a teda $32 = S = \frac{ab \sin \gamma}{2} \leq$

$\leq \frac{ab}{2} \leq \frac{(a+b)^2}{8} = \frac{16^2}{8} = 32$. Tým pádom teda $\frac{ab \sin \gamma}{2} = \frac{ab}{2} \Rightarrow \sin \gamma = 1 \Rightarrow \gamma = 90^\circ$ a zároveň aj $a = b = 8$

(rovnosť aritmetického a geometrického priemeru nastáva práve vtedy, keď sú čísla, z ktorých priemer robíme, rovnaké). Ide teda o rovnoramenný pravouhlý trojuholník s odvesnami dĺžky 8 cm a preponou dĺžky $8\sqrt{2} \text{ cm}$.

3. príklad (250/8)

Zadanie: Ak v ΔABC platí $\gamma = 45^\circ$, potom $S = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4}$. Dokážte.

Dôkaz (priamy):

Nech v ΔABC je $\gamma = 45^\circ \Rightarrow S = \frac{ab \sin \gamma}{2} = \frac{\sqrt{2}ab}{4}$. Z kosínusovej vety vieme, že

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 - \sqrt{2}ab \Rightarrow \sqrt{2}ab = a^2 + b^2 - c^2$. Po dosadení teda získavame

$S = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4}$ ČBTD.

4. príklad (250/9)

Zadanie: V ΔABC platí $\gamma = 2\alpha, |AC| = 2 \cdot |BC|$. Dokážte, že ΔABC je pravouhlý.

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 23: TROJUHLNÍK

Dôkaz (priamy):

Nech v $\triangle ABC$ platí $\gamma = 2\alpha, b = 2a$. Využitím sínusovej vety potom dostávame:

$$\frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha} = \frac{c}{a} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{c}{2a}$$

Teraz ešte využijeme aj kosínusovú vetu:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha = b^2 + c^2 - 2bc \frac{c}{2a} = b^2 + c^2 - 2bc \frac{c}{b} = b^2 + c^2 - 2c^2 = b^2 - c^2 \Rightarrow \underline{b^2 = a^2 + c^2}$$

Dostali sme teda vlastne Pytagorovu vetu platiacu iba pre pravouhlé trojuholníky. $\triangle ABC$ teda je pravouhlý s preponou b a odvesnami a, c ČBTD.

5. príklad (251/16)

Zadanie: Vypočítajte veľkosti vnútorných uhlov trojuholníka, ak viete, že ťažnica a výška vychádzajúce z jedného vrcholu tohto trojuholníka delia uhol pri tomto vrchole na tri rovnaké uhly.

Riešenie:

Trojuholník si označíme ABC , výšku z vrcholu C si označíme v , ťažnicu z tohto vrcholu t . Priesečníky v a t so stranou AB označíme P a S . Uhly, ktoré vznikli rozdelením uhla pri vrchole C označíme ω . Teraz môžeme prehlásiť, že $\triangle CSP \approx \triangle CBP$ (*usu*) $\Rightarrow |SP| = |PB| = x$. Keďže ťažnica t delí stranu AB na polovice, platí aj $|AS| = 2x$. Zároveň z podobnosti musí aj platiť, že uhol pri vrchole B a uhol pri vrchole S sú rovné $90^\circ - \omega$.

Teraz dorysujeme kolmicu z bodu S na stranu AC a priesečník tejto kolmice so stranou AC označíme R . Vidíme, že $\triangle CRS \approx \triangle CPS$ (*usu*) $\Rightarrow |RS| = |SP| = x$. Tiež vieme, že $|\angle CAB| = 90^\circ - 2\omega$.

Použitím vzorca pre goniometrickú funkciu sínus v $\triangle ASR$ dostávame:

$$\sin(90^\circ - 2\omega) = \frac{x}{2x}$$

$$\sin(90^\circ - 2\omega) = \frac{1}{2}$$

$$90^\circ - 2\omega = 30^\circ$$

$$\omega = 30^\circ$$

$\triangle ABC$ má teda vnútorné uhly: $\alpha = 30^\circ, \beta = 60^\circ, \gamma = 90^\circ$

