Autor: Martin Slota

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 28: VEKTORY

1. príklad (296/11)

Zadanie: Dokážte, že pre každé tri vektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ platí $(\vec{u}+\vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} \times \vec{w}) + (\vec{v} \times \vec{w})$.

Riešenie (priamy dôkaz):

$$\vec{u} = [u_x, u_y, u_z]$$

$$\vec{v} = [v_x, v_y, v_z]$$

$$\vec{w} = [w_x, w_y, w_z]$$

$$\forall \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}} \in \mathbf{V}; (\vec{\mathbf{u}}+\vec{\mathbf{v}}) \times \vec{\mathbf{w}} = [u_x + v_x, u_y + v_y, u_z + v_z] \times [w_x, w_y, w_z] = \begin{matrix} u_y + v_y & u_z + v_z & u_x + v_x & u_y + v_y \\ w_y & w_z & w_x & w_y \end{matrix} =$$

$$= [w_z u_y + w_z v_y - w_y u_z - w_y v_z, w_x u_z + w_x v_z - w_z u_x - w_z v_x, w_y u_x + w_y v_x - w_x u_y - w_x v_y] =$$

$$= [w_z u_y - w_y u_z, w_x u_z - w_z u_x, w_y u_x - w_x u_y] + [w_z v_y - w_y v_z, w_x v_z - w_z v_x, w_y v_x - w_x v_y] =$$

$$= (\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{w}}) + (\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}})$$

ČBTD

2. príklad (296/5)

Zadanie: Dokážte, že vektory $\vec{u_1} = [1,2,3], \vec{u_2} = [6,2,1], \vec{u_3} = [4,0,0]$ tvoria bázu v trojrozmernom vektorovom priestore a vyjadrite v tejto báze súradnice vektora $\vec{v} = [0,0,1]$.

Riešenie:

Dk. (priamy):

Aby $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}$ tvorili bázu:

1. musia byť LN: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 8 - 24 = -16 \Rightarrow$ sú LN
2. musia generovať A_3, čiže ľubovoľný vektor $[a,b,c]$ musí byť lineárnou kombináciou vektorov $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}$: $[a,b,c] = k \cdot [1,2,3] + l \cdot [6,2,1] + m \cdot [4,0,0] \quad (a,b,c,k,l,m \in R)$

$$a = k + 6l + 4m \quad (1)$$

$$b = 2k + 2l \quad (2)$$

$$c = 3k + l \quad (3)$$

$(2) - 2(3)$: $\quad b - 2c = -4k$

$$k = \frac{2c - b}{4}$$

(3): $\quad c - 3\frac{2c-b}{4} = l$

$$c - \frac{6c - 3b}{4} = l$$

$$\frac{3b - 2c}{4} = l$$

(1): $\quad m = \frac{a - k - 6l}{4}$

Autor: Martin Slota

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 28: VEKTORY

Podmienky sú splnené $\Rightarrow$ $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}$ tvoria bázu A_3 a $[k, l, m]$ sú súradnice vektora $[a, b, c]$ v tejto báze ČBTD.

Súradnice vektora $\vec{v}$ vypočítame zo vzorcov odvodených v dôkaze: súradnice $[0,0,1] = \left[\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right]$.

Autor: Martin Slota

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 28: VEKTORY

3. príklad (296/7)

Zadanie: Vypočítajte objem štvorstena ABCD, ak $A=[0,0,2], B=[1,-1,4], C=[4,2,4], D=[4,1,2]$ v karteziánskej sústave súradníc.

Riešenie:

$$\vec{u}=\overline{AB}=[1,-1,2]$$
$$\vec{v}=\overline{AC}=[4,2,2]$$
$$\vec{t}=\overline{AD}=[4,1,0]$$
$$\mathbf{V_{ABCD}}=\frac{1}{6}\left|\left(\vec{u}\times\vec{v}\right)\cdot\vec{t}\right|=\frac{1}{6}\left|\left([1,-1,2]\times[4,2,2]\right)\cdot[4,1,0]\right|=\frac{1}{6}\left|[-6,6,6]\cdot[4,1,0]\right|=\frac{1}{6}\left|-24+6\right|=\frac{1}{6}\cdot 18=\underline{\underline{\mathbf{3}}}$$

Objem štvorstena ABCD je 3.

pozn.: Zdôvodnenie použitého vzorca: 292/Pr. 1 (treba si radšej pozrieť, lebo ohľadne toho môžu byť kladené otázky; ten, kto má túto tému, by to mohol aj spomenúť pri teórii...)

4. príklad (296/8)

Zadanie: Nájdite uhol vektorov $\vec{a}=2\vec{m}+4\vec{n}, \vec{b}=\vec{m}-\vec{n}$, kde $\vec{m},\vec{n}$ sú jednotkové vektory, ktorých uhol je 120°.

Riešenie:

$$\mathbf{cos}\left(\angle\vec{\mathbf{a}}\vec{\mathbf{b}}\right)=\mathbf{cos}\ \alpha=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{\left(2\vec{m}+4\vec{n}\right)\cdot\left(\vec{m}-\vec{n}\right)}{\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}\cdot\sqrt{\vec{b}\cdot\vec{b}}}=\frac{2\vec{m}\cdot\vec{m}-2\vec{m}\cdot\vec{n}+4\vec{m}\cdot\vec{n}-4\vec{n}\cdot\vec{n}}{\sqrt{4\vec{m}\cdot\vec{m}+16\vec{m}\cdot\vec{n}+16\vec{n}\cdot\vec{n}}\cdot\sqrt{\vec{m}\cdot\vec{m}-2\vec{m}\cdot\vec{n}+\vec{n}\cdot\vec{n}}}\underset{\text{pozn.1}}{=}$$

$$\underset{\text{pozn.1}}{=}\frac{2|\vec{m}|^2+2\vec{m}\cdot\vec{n}-4|\vec{n}|^2}{\sqrt{4|\vec{m}|^2+16\vec{m}\cdot\vec{n}+16|\vec{n}|^2}\cdot\sqrt{|\vec{m}|^2-2\vec{m}\cdot\vec{n}+|\vec{n}|^2}}\underset{\text{pozn.2}}{=}\frac{2+2\vec{m}\cdot\vec{n}-4}{\sqrt{4+16\vec{m}\cdot\vec{n}+16}\cdot\sqrt{1-2\vec{m}\cdot\vec{n}+1}}\underset{\text{pozn.3}}{=}$$

$$\underset{\text{pozn.3}}{=}\frac{-2+2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{20+16\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}\cdot\sqrt{2-2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}}=\frac{-3}{\sqrt{12}\cdot\sqrt{3}}=\frac{-3}{2\cdot 3}=-\frac{1}{2}\Rightarrow\underline{\underline{\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{120°}}}$$

Uhol vektorov $\vec{a},\vec{b}$ je 120°.

Poznámky:

1. $\forall\vec{x}\in V;|\vec{x}|=\sqrt{\vec{x}\cdot\vec{x}}$ (definícia) $\Rightarrow\vec{x}\cdot\vec{x}=|\vec{x}|^2$
2. Jednotkový vektor je taký, ktorého veľkosť je rovná 1. Pokiaľ sú teda $\vec{m},\vec{n}$ jednotkové vektory, musia ich druhé mocniny byť rovné 1.
3. $\angle\vec{m}\vec{n}=120°\Rightarrow\cos\left(\angle\vec{m}\vec{n}\right)=-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}=\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}\underset{\text{pozn.2}}{=}\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{1\cdot 1}=\vec{\mathbf{m}}\cdot\vec{\mathbf{n}}$

Autor: Martin Slota

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 28: VEKTORY

5. príklad (296/9)

Zadanie: Ak je vektor $\vec{u}$ kolmý na vektor $\vec{v_1}$ aj $\vec{v_2}$, tak je vektor $\vec{u}$ kolmý aj na vektor $a\cdot\vec{v_1}-b\cdot\vec{v_2}$ $(a,b\in R)$. Dokážte.

Riešenie:

TD: $\forall\vec{u},\vec{v_1},\vec{v_2};\left(\vec{u}\perp\vec{v_1}\wedge\vec{u}\perp\vec{v_2}\right)\Rightarrow\vec{u}\perp\left(a\cdot\vec{v_1}-b\cdot\vec{v_2}\right)$

Dôkaz (priamy):

$$\forall\vec{u},\vec{v_1},\vec{v_2};\left(\vec{u}\perp\vec{v_1}\wedge\vec{u}\perp\vec{v_2}\right)\Rightarrow\vec{u}\cdot\vec{v_1}=0=\vec{u}\cdot\vec{v_2}$$

$$\vec{u}\cdot\left(a\cdot\vec{v_1}-b\cdot\vec{v_2}\right)\underset{\text{pom. tvr.1}}{=}\vec{u}\cdot\left(a\cdot\vec{v_1}\right)-\vec{u}\cdot\left(b\cdot\vec{v_2}\right)\underset{\text{pom. tvr. 2}}{=}a\cdot\left(\vec{u}\cdot\vec{v_1}\right)-b\cdot\left(\vec{u}\cdot\vec{v_2}\right)=0\Rightarrow\vec{u}\perp\left(a\cdot\vec{v_1}-b\cdot\vec{v_2}\right)\quad \text{ČBTD}$$

Pomocné tvrdenia:

1. TD: $\forall\vec{u},\vec{v},\vec{t};\ \vec{u}\cdot\left(\vec{v}-\vec{t}\right)=\vec{u}\cdot\vec{v}-\vec{u}\cdot\vec{t}$

   Dôkaz (priamy):

   $$\vec{u}=[u_1,u_2],\ \vec{v}=[v_1,v_2],\ \vec{t}=[t_1,t_2]\quad (u_1,u_2,v_1,v_2,t_1,t_2\in R)$$

   $$\vec{\mathbf{u}}\cdot\left(\vec{\mathbf{v}}-\vec{\mathbf{t}}\right)=[u_1,u_2]\cdot\left([v_1,v_2]-[t_1,t_2]\right)=[u_1,u_2]\cdot[v_1-t_1,v_2-t_2]=u_1\cdot v_1-u_1\cdot t_1+u_2\cdot v_2-u_2\cdot t_2=$$

   $$=(u_1\cdot v_1+u_2\cdot v_2)-(u_1\cdot t_1+u_2\cdot t_2)=\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}}-\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{t}}\quad \text{ČBTD}$$

2. TD: $\forall\vec{u},\vec{v};\ \vec{u}\cdot\left(a\cdot\vec{v}\right)=a\cdot\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)\quad (a\in R)$

   Dôkaz (priamy):

   $$\vec{u}=[u_1,u_2],\ \vec{v}=[v_1,v_2]\quad (u_1,u_2,v_1,v_2\in R)$$

   $$\vec{\mathbf{u}}\cdot\left(\mathbf{a}\cdot\vec{\mathbf{v}}\right)=[u_1,u_2]\cdot(a\cdot[v_1,v_2])=[u_1,u_2]\cdot[a\cdot v_1,a\cdot v_2]=u_1\cdot a\cdot v_1+u_2\cdot a\cdot v_2=a\cdot(u_1\cdot v_1+u_2\cdot v_2)=$$

   $$=a\cdot([u_1,u_2]\cdot[v_1,v_2])=\mathbf{a}\cdot\left(\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}}\right)\quad \text{ČBTD}$$

Poznámka:

Dôkazy pomocných tvrdení sa dajú obdobne previesť aj pre aritmetický vektorový priestor usporiadaných n-tíc.