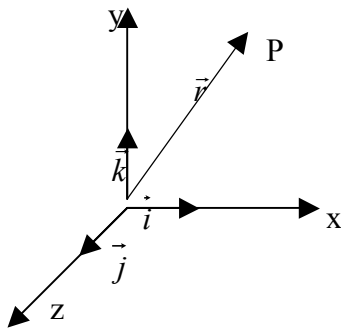


1 Kinematika hmotného bodu

- **kinematika** sa zaoberá určením polôh bodov a ich zmien v čase (kinematika pohybu telesa opisuje, nezaobera sa príčinami pohybu)
- pri teoretickom štúdiu **mechanického pohybu** (proces, pri ktorom sa mení poloha jedného telesa vzhľadom na iné teleso) sa zavádza pojem **hmotný bod**
 - o **hmotný bod** je teleso, pri ktorom sa hmotnosť telesa zachováva, ale jeho rozmery sa zanedbávajú
- na opis mechanického pohybu sa zavádza **vzťažný bod** a **vzťažná sústava**, vzhľadom na ktorú určíme polohu telesa a jej zmenu v závislosti od času
- pokoj alebo pohyb môžeme určovať len vzhľadom na vzťažnú sústavu – relativnosť pokoja a pohybu (relativnosť mechanického pohybu znamená, že opis pohybu závisí od voľby vzťažnej sústavy)
- **trajektória** je množina (súhrn) všetkých polôh, v ktorých sa hmotný bod pri pohybe vyskytuje, dĺžka trajektórie sa nazýva **dráha**
- ak trajektória hmotného bodu je časť priamky, koná bod **priamočiary pohyb**, v ostatných prípadoch je to **krivočiary pohyb**

1.1 polohový vektor



- polohový vektor určuje polohu hmotného bodu vzhľadom na súradnicovú sústavu
- poloha v priestore je jednoznačne daná polohovým vektorom $\vec{OP} = \vec{r}$, pre ktorý platí:
 - o $\vec{r} = xi + yj + zk$
 - o $\vec{r} = (x, y, z)$
- x, y, z sú súradnice vektora a \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} sú **jednotkové vektory** v smere jednotlivých osí, platí:
 - o $\vec{i} \perp \vec{j} \perp \vec{k}$
 - o $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$

- **veľkosť polohového vektora:**

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

- **smerný polohového vektora:**

- o smer polohového vektora sa určuje pomocou uhlov α , β , γ , ktoré zvierajú smer polohového vektora so smermi jednotlivých súradnicových osí x, y, z

$$\cos \alpha = \frac{x}{r}, \cos \beta = \frac{y}{r}, \cos \gamma = \frac{z}{r}, \text{ zároveň platí: } \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

1.2 rýchlosť

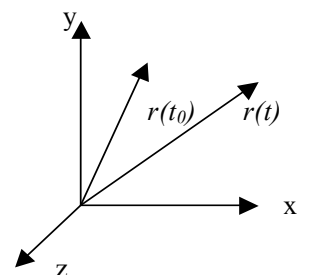
- rýchlosť pohybujúceho sa bodu sa môže v každom okamihu meniť, nemusí byť konštantná

- **priemerná rýchlosť hmotného bodu:**

- o zmena polohového vektora bodu za čas t

$$\vec{v}_p = \frac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)}{t - t_0} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}, [v] = m \cdot s^{-1}$$

- **okamžitá rýchlosť hmotného bodu:**



- prvá derivácia polohového vektora podľa času

$$\vec{v}_0 = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)}{t - t_0} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

- **zložky rýchlosti:**

$$\vec{v}_0 = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

- **veľkosť rýchlosti:**

$$v_0 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

- **smernosť rýchlosti:**

- keďže hodnota derivácie funkcie v bode sa rovná smernici dotyčnice ku grafu funkcie, tak rýchlosť má smer dotyčnice k trajektórii
- smer rýchlosti sa určuje pomocou uhlov α , β , γ , ktoré zvierajú smer rýchlosti so smerni jednotlivých súradnicových osí x, y, z
- $\cos \alpha = \frac{v_x}{v}$, $\cos \beta = \frac{v_y}{v}$, $\cos \gamma = \frac{v_z}{v}$, zároveň platí: $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$

1.3 zrýchlenie

- zrýchlenie pohybujúceho sa bodu sa môže v každom okamihu meniť, nemusí byť konštantné
- charakterizuje zmenu pohybového stavu
- **priemerné zrýchlenie hmotného bodu:**

- zmena vektora rýchlosti za čas t

$$\vec{a}_p = \frac{\vec{v}(t) - \vec{v}(t_0)}{t - t_0} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}, [a] = m \cdot s^{-2}$$

- **okamžité zrýchlenie hmotného bodu:**

- prvá derivácia rýchlosti podľa času (druhá derivácia polohového vektora podľa času)

$$\vec{a}_0 = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\vec{v}(t) - \vec{v}(t_0)}{t - t_0} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{a}_0 = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \vec{v} = \frac{d}{dt} \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{d}{dt} \vec{r} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

- **zložky zrýchlenia:**

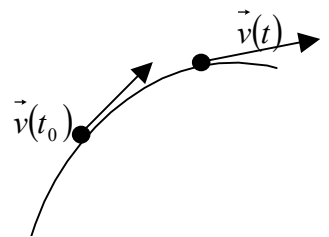
$$\vec{a}_0 = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}) = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

- **veľkosť zrýchlenia:**

$$a_0 = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\left(\frac{dv_x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv_y}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv_z}{dt}\right)^2}$$

- **smernosť zrýchlenia:**

- smer zrýchlenia sa určuje pomocou uhlov α , β , γ , ktoré zvierajú smer zrýchlenia so smerni jednotlivých súradnicových osí x, y, z
- $\cos \alpha = \frac{a_x}{a}$, $\cos \beta = \frac{a_y}{a}$, $\cos \gamma = \frac{a_z}{a}$, zároveň platí: $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$



1.4 zrýchlenie pri krivočiarom pohybe

- zrýchlenie pri krivočiarom pohybe sa rozdeľuje na zložku *tangenciálnu (dotyčnicovú)* a zložku *normálovú (dostredivú)*, pričom výsledné zrýchlenie je vektorovým súčtom týchto zložiek:

$$\circ \vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

- pre obvodovú rýchlosť platí: $\vec{v} = v\vec{\tau}$
- $\vec{\tau}$ (má smer dotyčnice ku krivke) a $\vec{\rho}$ (má smer normály ku krivke) sú **jednotkové vektory**, pričom platí:

$$\circ \vec{\tau} \perp \vec{\rho} \text{ a zároveň } |\vec{\tau}| = |\vec{\rho}| = 1$$

- pre zrýchlenie platí:

$$\circ \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\vec{\tau}) = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v\frac{d\vec{\tau}}{dt}$$

- pre $\vec{\tau}$ platí:

$$\circ \vec{\tau} \cdot \vec{\tau} = 1 \Rightarrow$$

$$\circ \frac{d\vec{\tau}}{dt} \cdot \vec{\tau} + \vec{\tau} \cdot \frac{d\vec{\tau}}{dt} = 0 \Rightarrow 2\vec{\tau} \cdot \frac{d\vec{\tau}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{\tau} \perp \frac{d\vec{\tau}}{dt} \Rightarrow \frac{d\vec{\tau}}{dt} \perp \vec{\rho}$$

$$\circ d\vec{\tau} \text{ je zmena vektora } \vec{\tau} \text{ za čas } dt$$

- podľa obr. platí:

$$\circ |d\vec{\tau}| = |\vec{\tau}|d\alpha = d\alpha \text{ a } d\alpha = \frac{ds}{R}$$

- platí:

$$\circ \frac{d\vec{\tau}}{dt} = \left| \frac{d\vec{\tau}}{dt} \right| (-\vec{\rho}) = \frac{|d\vec{\tau}|}{dt} (-\vec{\rho}) = \frac{d\alpha}{dt} (-\vec{\rho}) = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{1}{R} (-\vec{\rho}) = \frac{v}{R} (-\vec{\rho})$$

- pre zrýchlenie platí:

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v\frac{v}{R}(-\vec{\rho}) = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} - \frac{v^2}{R}\vec{\rho}$$

- **tangenciálne (dotyčnicové) zrýchlenie:**

- o pôsobí v smere dotyčnice, mení veľkosť (obvodovej) rýchlosti

$$\circ |\vec{a}_t| = \frac{dv}{dt}$$

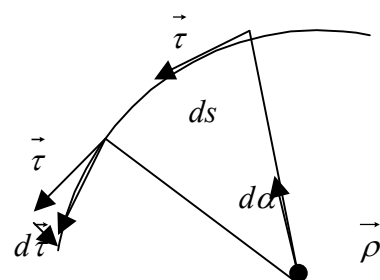
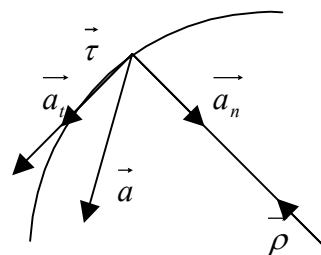
- **normálové (dostredivé) zrýchlenie:**

- o pôsobí v kolmom smere na smer rýchlosti, mení smer rýchlosti

$$\circ |\vec{a}_n| = \frac{v^2}{R}$$

- **veľkosť celkového zrýchlenia:**

$$\circ |\vec{a}| = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$



1.5 uhlová rýchlosť a uhlové zrýchlenie

- **uhlová rýchlosť:**

$$\circ \omega = \frac{d\alpha}{dt}, [\omega] = s^{-1}$$

- **uhlové zrýchlenie:**

$$\circ \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\alpha}{dt^2}, [\varepsilon] = s^{-2}$$

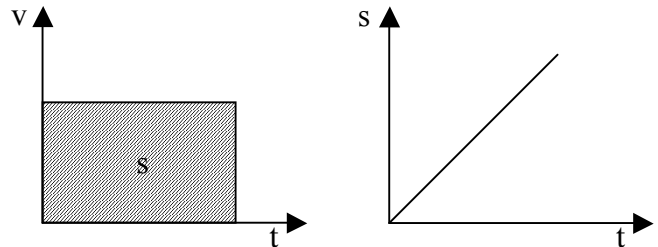
- uhlová rýchlosť súvisí s obvodovou rýchlosťou pohybujúceho sa bodu vzťahom:

- $v = R\omega$, kde R je príslušný polomer krivosti
- pre obvodovú rýchlosť platí:
 - $v = \frac{ds}{dt}$
- pre a_t platí:
 - $a_t = R\varepsilon$

1.6 niektoré druhy pohybov

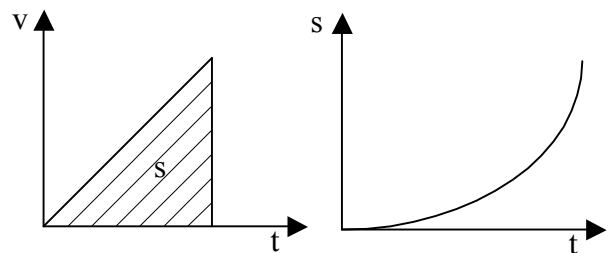
1.6.1 rovnomerný priamočiary pohyb

- pre rýchlosť zrýchlenie a dráhu platí:
 - $v = \text{konšt.}$
 - $a = \frac{dv}{dt} = 0$
 - $s = \int v \cdot dt = vt + s_0$, kde s_0 je dĺžka dráhy v čase $t=0$



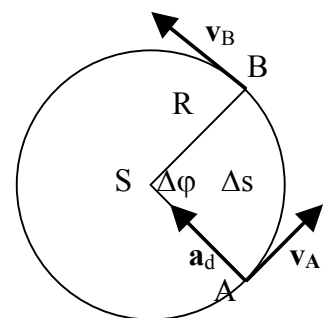
1.6.2 rovnomerne zrýchlený priamočiary pohyb

- pre zrýchlenie, rýchlosť a dráhu platí:
 - $a = \text{konšt.}$
 - $v = \int a \cdot dt = at + v_0$, kde v_0 je začiatočná rýchlosť
 - $s = \int v \cdot dt = \int (at + v_0) dt = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + s_0$
- ak $a < 0$, tak ide o **rovnomerne spomalený priamočiary pohyb**, v tomto prípade a nazývame **spomalením** (pri spomalenom pohybe má rýchlosť a zrýchlenie opačný smer)



1.6.3 rovnomerný pohyb po kružnici

- pohyb, pri ktorom sa hmotný bod pohybuje po trajektórii tvaru kružnice, pričom jeho rýchlosť je konštantná
- hmotný bod koná rovnomerný pohyb po kružnici, ak za rovnaké ľubovoľne zvolené časové úseky Δt opíše rovnako dlhé oblúky kružnice Δs , ktorým prislúchajú rovnako veľké uhly $\Delta\varphi$, pričom $\Delta\varphi = \frac{\Delta s}{R}$
- pre uhlovú a obvodovú rýchlosť, uhlové zrýchlenie a uhol platí:
 - $\omega = \text{konšt.}$
 - $v = \frac{2\pi R}{T} = 2\pi Rf = \omega R$
 - $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 0$
 - $\alpha = \int \omega \cdot dt = \omega t + \alpha_0$, kde α_0 je uhol, ktorý zvierá polohový vektor pohybujúceho sa bodu vzhľadom na stred kružnice v čase $t=0$ s určitým, za základ zvoleným smerom polohového vektora
- **perióda T:**
 - čas, za ktorý bod raz obehne kružnicu
 - $T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi R}{R\omega} = \frac{2\pi}{\omega}$



- **frekvencia f :**

- o počet obehov za jednotku času

- o $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$

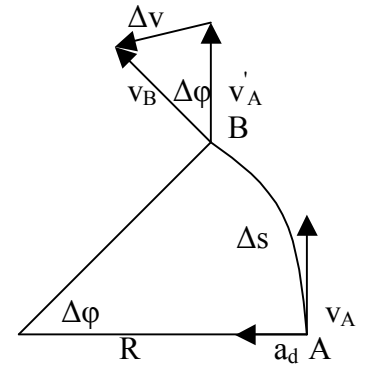
- **iné odvodenie normálového (dostredivého) zrýchlenia:**

- o za dobu Δt hmotný bod prejde oblúk dĺžky $\Delta s = R \cdot \Delta\varphi$, ktorému zodpovedá uhol $\Delta\varphi = \omega \cdot \Delta t$

- o pre zmenu okamžitej rýchlosti v dôsledku zmeny jej smeru platí:

- $\Delta v = v \cdot \Delta\varphi = v \cdot \omega \cdot \Delta t = \frac{v^2}{R} \cdot \Delta t$ a z toho

- $a_d = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v^2}{R} = v\omega = \omega^2 R = \frac{4\pi^2}{T^2} R$



1.6.4 rovnomerne zrýchlený pohyb po kružnici

- pre uhlové zrýchlenie, uhlovú rýchlosť a uhol platí:

- o $\varepsilon = \text{konšt.}$

- o $\omega = \int \varepsilon \cdot dt = \varepsilon t + \omega_0$

- o $\alpha = \int \omega \cdot dt = \int (\varepsilon t + \omega_0) dt = \frac{1}{2} \varepsilon t^2 + \omega_0 t + \alpha_0$