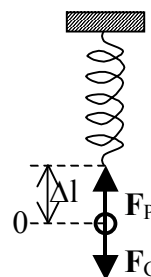


## 18 Kmitavý pohyb

- mechanický pohyb sústavy charakterizovaný veličinami, ktoré sú periodickými funkciami času
- každé zariadenie, ktoré môže voľne bez vonkajšieho pôsobenia) kmitať, nazýva sa **oscilátor**
- periodicky opakujúca sa časť kmitavého pohybu sa nazýva **kmit**
- charakteristické veličiny kmitavého pohybu:
  - o **perióda (doba kmitu)  $T$** :
    - čas, za ktorý prebehne jeden kmit a oscilátor sa dostane do zvoleného začiatočného stavu; meria sa v sekundách
  - o **frekvencia (kmitočet)  $f$** :
    - rovná sa počtu kmitov, ktoré prebehnú za sekundu; je prevrátenou hodnotou periódy:
      - $f = \frac{1}{T}$ ,  $[f] = s^{-1} = \text{Hz}$  (jednotkou frekvencie je **Herz**)
- kmitavý pohyb môžeme znázorniť v **časovom diagrame**, v ktorom sú znázornené okamžité polohy kmitajúceho telesa ako funkcie času; časovým diagramom **jednoduchého (harmonického) kmitavého pohybu** je sínusoida

### 18.1 pružinový oscilátor

- patrí medzi mechanické oscilátory; na začiatku máme pružinu dĺžky  $l$ , túto pružinu charakterizuje **tuhosť pružiny  $k$**  (od tuhosti pružiny závisí jej predĺženie počas kmitavého pohybu)
- keď na pružinu zavesíme závažie s hmotnosťou  $m$ , pružina sa pôsobením tiažovej sily  $\vec{F}_G$  predĺži o  $\Delta l$ ; v dôsledku pružnosti pružiny vznikne **sila pružnosti  $\vec{F}_p$** , ktorej veľkosť sa v závislosti od predĺženia zväčšuje. Sila  $\vec{F}_p$  má opačný smer ako tiažová sila  $\vec{F}_G$ , ktorá pôsobí na závažie. Po istom čase sa ustáli v **rovnovážnej polohe  $O$** , v ktorej je veľkosť tiažovej sily a sily pružnosti rovnaná, ale majú opačný smer; platí:
  - o  $F_G = F_p \Rightarrow mg = k \cdot \Delta l$
- keď pružinu predĺžime o  $y$ , tak začne kmitať; výchylka  $y$  z rovnovážnej polohy sa volá **okamžitá výchylka**, vzhľadom na rovnovážnu polohu nadobúda kladné aj záporné hodnoty. V istých okamihoch dosahuje  $y$  najväčšie kladné, prípadne záporne hodnoty – túto najväčšiu hodnotu okamžitej výchylky nazývame **amplítúda výchylky  $y_m$**
- pre výslednú silu  $F$ , ktorá spôsobuje kmitanie, platí:
  - o  $F = mg - k(\Delta l + y) = \overbrace{mg - k \cdot \Delta l}^0 - ky = -ky$
  - o znamienko mínus vyjadruje, že sila  $F$  a okamžitá výchylka majú v každom okamihu opačný smer
- **pohybová rovnica**:
  - o  $ma = -ky \Rightarrow \frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{k}{m} y \Rightarrow \frac{d^2 y}{dt^2} = -\omega^2 y$ , kde  $\omega$  je **uhlová frekvencia**
  - o pre uhlovú frekvenciu, periódu a frekvenciu platí:
    - $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \wedge \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$
- riešením pohybovej rovnice dostaneme:
  - o **poloha hmotného bodu v čase**:
    - $y = y_m \sin(\omega t + \varphi)$
  - o **okamžitá rýchlosť**:



- $\frac{dy}{dt} = v = y_m \omega \cos(\omega t + \varphi)$

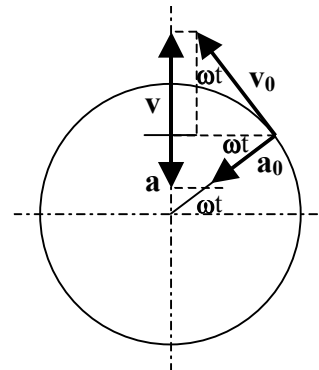
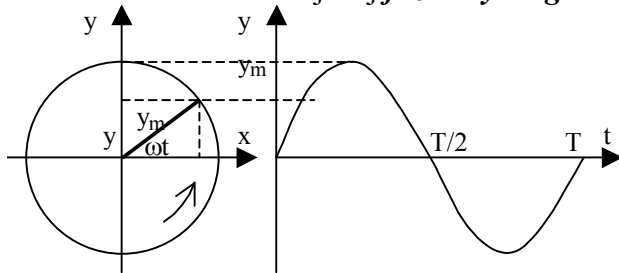
- **okamžité zrýchlenie:**

- $\frac{d^2y}{dt^2} = a = -y_m \omega^2 \sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 y$

- zrýchlenie kmitavého pohybu je priamo úmerné okamžitej výchylke a v každom okamihu má opačný smer ako okamžitá výchylka

- výraz v zátvorke  $(\omega t + \varphi)$  sa volá **fáza** a  $\varphi$  je **fázový posun** a určuje hodnotu veličiny harmonického kmitania v začiatočnom okamihu ( $t=0$  s)

- kmitavý pohyb môžeme odvodiť aj z rovnomerného pohybu hmotného bodu po kružnici (kmitavý pohyb zodpovedá priemetu rovnomerného pohybu po kružnici do zvislej polohy); pomocou rovnomerného pohybu po kružnici môžeme zostrojiť aj **fázorový diagram**



## 18.2 matematické kyvadlo

- patrí medzi mechanické oscilátory; kyvadlo je hmotný bod zavesený na tuhom vlákne zanedbateľnej hmotnosti; kmitanie spôsobuje zložka tiažovej sily  $F_t$

- pre silu, ktorá spôsobuje kmitanie, platí:

- $F_t = -mg \sin \alpha$

- pre uhly menšie ako  $5^\circ$ , môžeme použiť:

- $\alpha = \frac{s}{l} \approx \frac{y}{l} \Rightarrow \sin \alpha \approx \alpha \approx \frac{y}{l}$

- pre silu  $F_t$  platí:

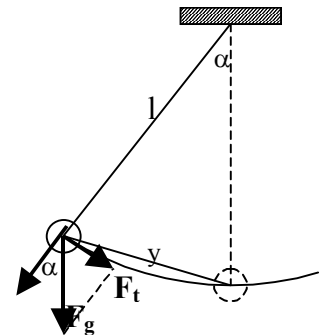
- $F_t = -mg \frac{y}{l} = -\frac{mg}{l} y$

- pohybová rovnica:

- $ma = -\frac{mg}{l} y \Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{g}{l} y \Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 y$

- pre periódu kmitov na matematickom kyvadle platí:

- $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}}$



## 18.3 fyzikálne kyvadlo

- pod fyzikálnym kyvadlom rozumieme každé teleso, ktoré sa vplyvom vlastnej tiaže kýve okolo vodorovnej osi neprechádzajúcej ťažiskom

- kmitanie spôsobuje zložka tiažovej sily:

- $F_t = -mg \sin \varphi$

- pre uhly menšie ako  $5^\circ$  platí:

- $F_t = -mg \varphi$

- znamienko mínus vyjadruje, že zložka tiažovej sily, ktorá spôsobuje kmitanie, má vždy opačný smer ako okamžitá výchylka
- pri fyzikálnom kyvadle ide v podstate o otáčavý pohyb telesa okolo pevnej osi, takže možno použiť pohybovú rovnicu rotujúceho telesa:

$$M = J\varepsilon$$

$$\circ -mgb \sin \varphi = J\varepsilon \Rightarrow -mgb \varphi = J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\frac{mgb}{J} \varphi$$

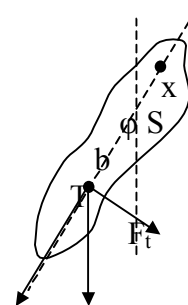
$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\omega^2 \varphi, \text{ kde } \omega^2 = \frac{mgb}{J}$$

- $b$  je vzdialenosť stredu otáčania  $S$  od ťažiska  $T$

- pre **periódu kmitov** kmitov platí:

$$\circ T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgb}} = 2\pi \sqrt{\frac{J_0 + mb^2}{mgb}}$$

- $J_0$  je **moment zotrvačnosti telesa** vzhľadom na os prechádzajúcu ťažiskom



### 18.3.1 redukovaná dĺžka fyzikálneho kyvadla

- redukovaná dĺžka fyzikálneho kyvadla je vzájomná vzdialenosť dvoch osí nesymetricky položených vzhľadom na ťažisko, okolo ktorých sa kýve kyvadlo s rovnakou periódou
- pre redukovanú dĺžku platí:

$$\circ l = b + x$$

- z rovnosti periód vyplýva:

$$\circ \frac{J_0 + mx^2}{mgx} = \frac{J_0 + mb^2}{mgb}$$

$$mbx^2 - (J_0 + mb^2)x + J_0b = 0$$

- riešením tejto rovnice dostaneme dva korene:

$$x_1 = a$$

$$\circ x_2 = \frac{J_0}{mb}$$

- tejto úlohe vyhovuje riešenie  $x_2 = \frac{J_0}{mb}$ , takže pre redukovanú dĺžku platí:

$$\circ l = b + \frac{J_0}{mb} = \frac{J_0 + mb^2}{mb} = \frac{J}{mb}$$

- redukovanú dĺžku fyzikálneho kyvadla možno interpretovať aj ako dĺžku takého matematického kyvadla, ktoré sa kýve s rovnakou periódou ako fyzikálne kyvadlo:

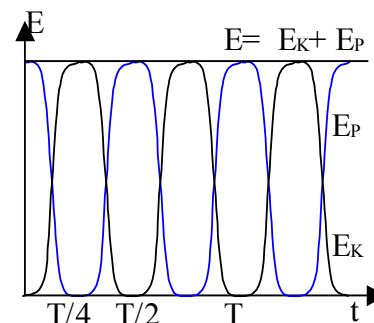
$$\circ T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{b + \frac{J_0}{mb}}{g}}$$

### 18.4 premeny energie v mechanickom oscilátore

- pre potenciálnu energiu napnutej pružiny platí:

$$\circ W = \int_0^y F \cdot dy = \int_0^y ky \cdot dy = k \int_0^y y \cdot dy = \frac{1}{2} ky^2 = E_p$$

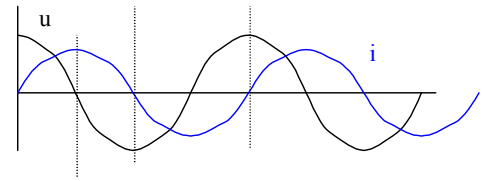
- pri kmitaní platí **zákon zachovania energie** (periodicky sa mení potenciálna energia oscilátora na kinetickú energiu a naopak). Celková energia oscilátora je konštantná a v každom okamihu sa rovná súčtu potenciálnej a kinetickej energie



- $E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}ky^2 = \frac{1}{2}my_m^2\omega^2 \cos^2 \omega t + \frac{1}{2}ky_m^2 \sin^2 \omega t \Rightarrow$
- $E_k + E_p = \frac{1}{2}ky_m^2 \cos^2 \omega t + \frac{1}{2}ky_m^2 \sin^2 \omega t = \frac{1}{2}ky_m^2 (\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t) = \frac{1}{2}ky_m^2$
- keď teleso dosiahne amplitúdu výchylky, je kinetická energia nulová, teda celú energiu tvorí potenciálna energia, pre ktorú platí:
  - $E_p = \frac{1}{2}ky_m^2$
- v praxi dochádza k **tlmenému kmitaniu**; amplitúda sa postupne znižuje (spôsobuje to odpor prostredia, trenie); vlastné kmitanie oscilátora je vždy tlmené

## 18.5 elektromagnetický oscilátor

- na rozdiel od mechanického oscilátora, v ktorom sa periodicky mení potenciálna energia na kinetickú, sa s elektromagnetickým oscilátore mení elektrická energia na magnetickú (najjednoduchším príkladom elektrického obvodu, ktorý má tieto vlastnosti, je obvod s cievkou a kondenzátorom – **LC obvod (oscilačný obvod)**)
- na začiatku kondenzátor nabijeme zo zdroja jednosmerného napätia a pripojíme ho k cievke; za štvrtinu periódy sa vybijie a prúd je maximálny, vzniká indukované napätie. Za ďalšiu štvrtinu periódy sa kondenzátor nabije indukovaným prúdom, ale polarita je už opačná. V druhej polovici periódy sa tento dej opakuje opačným smerom.
  - amplitúdy napätia a prúdu sa postupne znižujú, až kmitanie zanikne. Príčinou je odpor  $R$  oscilačného obvodu, v ktorom sa mení energia elektrického a magnetického poľa na vnútornú energiu vodiča; nastáva tlmenie kmitov
  - časové diagramy napätia a prúdu v oscilačnom obvode sú navzájom posunuté o štvrtinu periódy. V okamihu, keď je prúd v obvode nulový, napätie a teda aj náboj na kondenzátore sú najväčšie. naopak maximálnej hodnote prúdu zodpovedá nulový náboj kondenzátora. To dokazuje, že v elektromagnetickom oscilátore sa periodicky mení elektrická energia na magnetickú a naopak.
- kondenzátor má **elektrickú energiu**:
  - $E_e = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$
- nabitý kondenzátor je zdrojom prúdu v cievke. V okolí cievky vzniká magnetické pole s **magnetickou energiou**:
  - $E_m = \frac{1}{2}LI^2$
- mechanickým a elektromagnetickým poľom platia nasledujúce **analógie**:



Mechanický oscilátor		Elektromagnetický oscilátor	
okamžitá výchylka	$y$	okamžitý náboj	$q$
rýchlosť	$v$	okamžitý prúd	$i$
potenciálna energia	$E_p$	elektrická energia	$E_e$
kinetická energia	$E_k$	magnetická energia	$E_m$
sila	$F$	okamžité napätie	$u$
hmotnosť	$m$	indukčnosť	$L$
tuhosť pružiny	$k = \frac{F}{y}$	recipročná hodnota kapacity	$\frac{1}{C} = \frac{u}{q}$

- použitím týchto analógií medzi oscilátormi dostaneme:
  - **perióda a frekvencia kmitov**:

- $T_0 = 2\pi\sqrt{LC} \Rightarrow f_0 = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{LC}}$
- **okamžitý náboj** sa mení podľa vzťahu:
  - $q = Q_m \cos \omega t$
- **uhlová frekvencia vlastného kmitania** oscilačného obvodu:
  - $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
- **okamžité napätie** medzi platňami kondenzátora:
  - $u = \frac{Q_m}{C} \cos \omega t = U_m \cos \omega t$
- **okamžitý prúd** v oscilačnom obvode je posunutý p začiatočnú fázou  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ :
  - $i = I_m \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = I_m \sin \omega t$

## 18.6 energia mechanického a elektromagnetického oscilátora

### - **mechanický oscilátor:**

- potenciálna energia:  $E_p = \frac{1}{2}ky^2$
- kinetická energia:  $E_k = \frac{1}{2}mv^2$

### - **elektromagnetický oscilátor:**

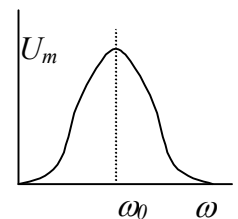
- elektrická energia:  $E_e = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$
- magnetická energia:  $E_m = \frac{1}{2}LI^2$

## 18.7 nútené kmitanie oscilátora

- nútené kmitanie vzniká pôsobením sily alebo napätia na oscilátor aj na objekty, ktoré nemajú vlastnosť oscilátora (netlmené harmonické kmitanie vznikne, keď sa straty nahrádzajú počas celej periódy; to možno dosiahnuť, keď na oscilátor pôsobí nepretržite harmonická sila  $F = F_m \sin \omega t$  alebo harmonické napätie  $U = U_m \sin \omega t$ ; pôsobením tejto sily, prípadne napätia, je v oscilátore vynucované netlmené harmonické kmitanie, ktoré sa volá **nútené kmitanie oscilátora**).
- frekvencia núteného kmitania závisí od frekvencie pôsobiacej sily, prípadne napätia, a nezávisí od vlastnosti kmitajúceho objektu. Nútené kmitanie je netlmené.

### 18.7.1 rezonancia oscilátora

- amplitúda nútených kmitov dosahuje najväčšiu hodnotu v okamihu, keď frekvencia nútených kmitov dosiahne vlastnú frekvenciu oscilátora – táto frekvencia sa nazýva **rezonančná frekvencia**; pri tejto frekvencii nastane **rezonancia oscilátora**
- amplitúda nútených kmitov pri rezonančnej frekvencii je väčšia, ako by zodpovedalo amplitúde sily, príp. napätia, ktoré kmitanie spôsobilo
- rezonanciu môžeme považovať za vzájomné pôsobenie dvoch oscilátorov. Jeden je zdrojom núteného kmitania (**oscilátor**) a druhý sa pôsobením zdroja nútene rozkmitá (**rezonátor**)



## 18.8 skladanie kmitov

### 18.8.1 kmity v jednej priamke

#### - izochrónne kmity:

- izochrónne kmity majú rovnakú uhlovú frekvenciu (periódu)
- pôsobia dve sily v jednej priamke; ak by pôsobili samostatne, tak obe by vyvolali kmity

- $y_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$

- $y_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$

- výsledný pohyb je daný sčítaním oboch rovníc (dostaneme opäť harmonickú funkciu:

- $y = y_1 + y_2 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \Rightarrow$

- $y = A_1 \cos \omega t \cdot \cos \varphi_1 - A_1 \sin \omega t \cdot \sin \varphi_1 + A_2 \cos \omega t \cdot \cos \varphi_2 - A_2 \sin \omega t \cdot \sin \varphi_2 \Rightarrow$

- $y = \cos \omega t \cdot \underbrace{(A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2)}_{A \cdot \cos \varphi} - \sin \omega t \cdot \underbrace{(A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2)}_{A \cdot \sin \varphi}$

- zavádzame substitúciu:

- $A \cdot \cos \varphi = A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2$

- $A \cdot \sin \varphi = A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2$

- dosadenie (dostaneme **výslednú rovnicu harmonického pohybu**):

- $y = A \cos \omega t \cdot \cos \varphi - A \sin \omega t \cdot \sin \varphi$

- $y = A \cos(\omega t + \varphi)$

- **výsledná fáza** (dostaneme ju zo substitúcií):

- $\operatorname{tg} \varphi = \frac{A \sin \varphi}{A \cos \varphi} = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}$

- $\varphi = \operatorname{arctg} \left( \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2} \right)$

- **výsledná amplitúda** (umocníme obe substitúcie a sčítame ich):

- $A^2 \sin^2 \varphi = A_1^2 \sin^2 \varphi_1 + 2A_1 A_2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + A_2^2 \sin^2 \varphi_2$

- $A^2 \cos^2 \varphi = A_1^2 \cos^2 \varphi_1 + 2A_1 A_2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + A_2^2 \cos^2 \varphi_2$

- $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$

- $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$

#### - neizochrónne kmity:

- kmity, ktoré majú rovnaké amplitúdy a fázové posuny, líšia sa uhlovou frekvenciou

- pôsobia dve sily v jednej priamke, ktoré spôsobujú kmity:

- $y_1 = A \cos(\omega_1 t + \varphi)$

- $y_2 = A \cos(\omega_2 t + \varphi)$

- výsledný pohyb je daný sčítaním oboch rovníc (dostaneme výslednú rovnicu kmitavého pohybu):

- $y = y_1 + y_2 = A \cos(\omega_1 t + \varphi) + A \cos(\omega_2 t + \varphi)$

- $y = 2A \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \cdot \cos \left[ \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \varphi \right]$

- **výsledná uhlová frekvencia**:

- $\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{4\pi}{\omega_1 + \omega_2}$

- **výsledná amplitúda**:

$$\blacksquare A' = 2A \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t$$

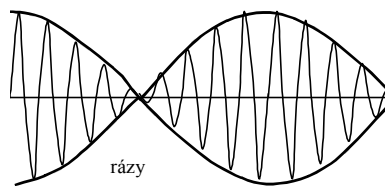
- pri porovnateľných uhlových frekvenciách vznikajú **rázy**:

- výsledná amplitúda závisí od času  $t$ , a preto pre **periódu zmeny amplitúdy** platí:

$$\bullet T' = \frac{2\pi}{\omega'} = \frac{4\pi}{\omega_1 - \omega_2}$$

- pre **periódu rázy** platí:

$$\bullet T_r = \frac{T'}{2} = \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2}$$



### - **kolmé kmity:**

- pôsobia dve sily ktoré sú na seba kolmé
- máme kmity, ktoré majú rovnakú uhlovú frekvenciu, ale líšia sa amplitúdou, fázovým posunom

$$\blacksquare x = A \cos(\omega t + \alpha_x)$$

$$\blacksquare y = B \cos(\omega t + \alpha_y)$$

- z týchto rovníc potrebujeme vylúčiť časové členy (najprv  $\cos$ , potom  $\sin$ , výsledné rovnice umocníme a sčítame):

$$\blacksquare \frac{x}{A} = \cos \omega t \cdot \cos \alpha_x - \sin \omega t \cdot \sin \alpha_x \cdot \cos \alpha_y$$

$$\blacksquare \frac{y}{B} = \cos \omega t \cdot \cos \alpha_y - \sin \omega t \cdot \sin \alpha_y \cdot (-\cos \alpha_x)$$

$$\blacksquare \frac{x}{A} \cos \alpha_y = \cos \omega t \cdot \cos \alpha_x \cos \alpha_y - \sin \omega t \cdot \sin \alpha_x \cdot \cos \alpha_y \rightarrow (1)$$

$$\blacksquare -\frac{y}{B} \cos \alpha_x = -\cos \omega t \cdot \cos \alpha_y \cos \alpha_x + \sin \omega t \cdot \sin \alpha_y \cdot \cos \alpha_x \rightarrow (2)$$

- rovnice (1) a (2) sčítame:

$$\blacksquare \frac{x}{A} \cos \alpha_y - \frac{y}{B} \cos \alpha_x = \sin \omega t \cdot \sin(\alpha_y - \alpha_x) \rightarrow (3)$$

$$\blacksquare \frac{x}{A} = \cos \omega t \cdot \cos \alpha_x - \sin \omega t \cdot \sin \alpha_x \cdot \sin \alpha_y$$

$$\blacksquare \frac{y}{B} = \cos \omega t \cdot \cos \alpha_y - \sin \omega t \cdot \sin \alpha_y \cdot (-\sin \alpha_x)$$

$$\blacksquare \frac{x}{A} \sin \alpha_y = \cos \omega t \cdot \cos \alpha_x \sin \alpha_y - \sin \omega t \cdot \sin \alpha_x \cdot \sin \alpha_y \rightarrow (4)$$

$$\blacksquare -\frac{y}{B} \sin \alpha_x = -\cos \omega t \cdot \cos \alpha_y \sin \alpha_x + \sin \omega t \cdot \sin \alpha_y \cdot \sin \alpha_x \rightarrow (5)$$

- rovnice (4) a (5) sčítame:

$$\blacksquare \frac{x}{A} \sin \alpha_y - \frac{y}{B} \sin \alpha_x = \cos \omega t \cdot \sin(\alpha_y - \alpha_x) \rightarrow (6)$$

- rovnice (3) a (6) umocníme:

$$\blacksquare \frac{x^2}{A^2} \cos^2 \alpha_y - 2 \frac{x}{A} \frac{y}{B} \cos \alpha_x \cos \alpha_y + \frac{y^2}{B^2} \cos^2 \alpha_x = \sin^2 \omega t \cdot \sin^2(\alpha_y - \alpha_x) \rightarrow (7)$$

$$\blacksquare \frac{x^2}{A^2} \sin^2 \alpha_y - 2 \frac{x}{A} \frac{y}{B} \sin \alpha_x \sin \alpha_y + \frac{y^2}{B^2} \sin^2 \alpha_x = \cos^2 \omega t \cdot \sin^2(\alpha_y - \alpha_x) \rightarrow (8)$$

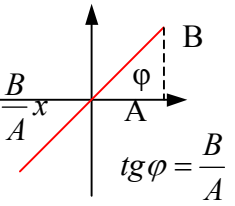
- rovnice (7) a (8) sčítame a dostaneme **výslednú rovnicu trajektórie pohybu**:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - 2\frac{x}{A}\frac{y}{B}\cos(\alpha_y - \alpha_x) = \sin^2(\alpha_y - \alpha_x)$$

○ podľa rozdielu fáz rozlišujeme rôzne prípady:

$$\alpha_y - \alpha_x = 0$$

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - 2\frac{x}{A}\frac{y}{B} = 0 \Rightarrow \left(\frac{x}{A} - \frac{y}{B}\right)^2 = 0 \Rightarrow \frac{x}{A} = \frac{y}{B} \Rightarrow y = \frac{B}{A}x$$



• v tomto prípade výsledná trajektória má tvar úsečky

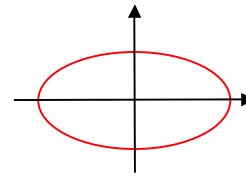
$$\alpha_y - \alpha_x = \pi$$

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + 2\frac{x}{A}\frac{y}{B} = 0 \Rightarrow \left(\frac{x}{A} + \frac{y}{B}\right)^2 = 0 \Rightarrow \frac{x}{A} = -\frac{y}{B} \Rightarrow y = -\frac{B}{A}x$$

• výsledná trajektória má tvar úsečky

$$\alpha_y - \alpha_x = \frac{\pi}{2} \vee \alpha_y - \alpha_x = \frac{3\pi}{2}$$

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$$



• výsledná trajektória má tvar elipsy

• ak  $\alpha_y - \alpha_x = \frac{\pi}{2}$ , výsledné kmity sú v smere hodinových ručičiek

• ak  $\alpha_y - \alpha_x = \frac{3\pi}{2}$ , výsledný pohyb je proti smeru hodinových ručičiek