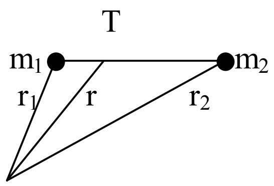
2 Mechanika tuhého telesa

- pri opise pohybu pevného telesa nemôžeme vždy zanedbať jeho rozmery tak ako pri hmotnom bode, a tak zavádzame model reálneho pevného telesa – ***tuhé teleso***
    - ***tuhé teleso*** je ideálne teleso, ktorého tvar a objem sa účinkom ľubovoľne veľkých síl nemení
- medzi časticami telesa pôsobia vnútorné sily, ktoré sa navzájom rušia, a tak nemajú vplyv na pohybový stav telesa ako celku
- zmenu pohybového stavu môžu spôsobiť len vonkajšie sily (vnútorné sily sa navzájom rušia)
- tuhé teleso môže konať:
    - ***posuvný (translačný) pohyb***
        - všetky body telesa majú v ľubovoľnom okamihu rovnakú okamžitú rýchlosť a opíšu za ten čas rovnakú trajektóriu
    - ***otáčavý (rotačný) pohyb***
        - všetky body telesa majú v ľubovoľnom okamihu rovnakú okamžitú uhlovú rýchlosť, opisujú kruhové trajektórie, ktorých stredy ležia na jednej priamke – os otáčania
    - pohyb zložený z týchto pohybov

2.1 ťažisko telesa



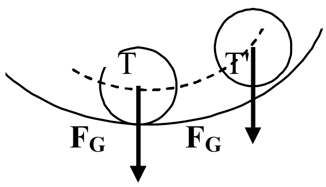
- ťažisko telesa je pôsobisko tiažovej sily, ktorá pôsobí na teleso
- ***dva hmotné body:***
    - pre polohu ťažiska platí:
        - $\overrightarrow{r_{12}^{*}} = \dfrac{m_1\vec{r_1} + m_2\vec{r_2}}{m_1 + m_2}$
    - platí: pomer hmotnosti hmotných bodov sa rovná obrátenej hodnote pomeru vzdialenosti ťažísk hmotných bodov od výsledného ťažiska
- ***tri hmotné body:***
    - pre polohu ťažiska platí:
        - $\overrightarrow{r_{123}^{*}} = \dfrac{m_1\vec{r_1} + m_2\vec{r_2} + m_3\vec{r_3}}{m_1 + m_2 + m_3}$
- ***N hmotných bodov:***
    - pre polohu ťažiska platí:
        - $\overrightarrow{r_{1N}^{*}} = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r_i}}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$
- ***tuhé teleso:***
    - pre polohu ťažiska platí:
        - $\overrightarrow{r^{*}} = \dfrac{\int_V \vec{r}.dm}{\int_V dm} = \dfrac{1}{m}\int_V \vec{r}.dm$
    - pre súradnice ťažiska platí:
        - $x = \dfrac{1}{m}\int_V x.dm$, $y = \dfrac{1}{m}\int_V y.dm$, $z = \dfrac{1}{m}\int_V z.dm$
    - hmotnostný element môžeme vyjadriť $dm=\rho.dV$, hustota telesa nemusí byť konštantná

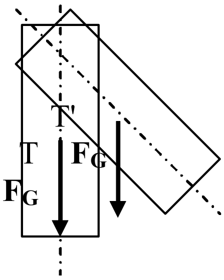
2.2 *rovnovážna poloha telesa*

- tuhé teleso je v rovnovážnej polohe, ak vektorové súčty všetkých síl a všetkých momentov síl, ktoré na teleso pôsobia, sú nulové vektory a teleso je v pokoji

2.2.1 stála (stabilná) poloha

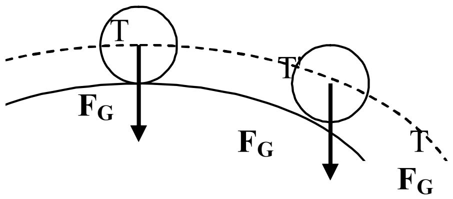
- teleso po vychýlení z rovnovážnej polohy sa pôsobením momentu tiažovej sily vracia späť do rovnovážnej polohy, v ktorej je ťažisko telesa najnižšie, teda teleso má najmenšiu potenciálnu energiu

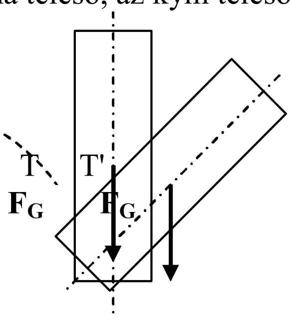




2.2.2 vratká (labilná) poloha

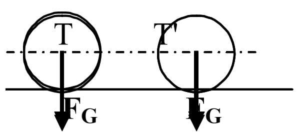
- po vychýlení sa teleso samovoľne nevráti do tejto polohy; ťažisko je najvyššie, teda teleso má najväčšiu potenciálnu energiu
- moment tiažovej sily pôsobí na teleso, až kým teleso nezaujme rovnovážnu polohu stálu

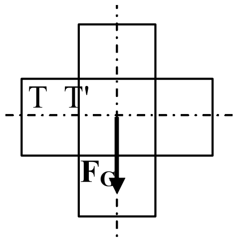




2.2.3 voľná (indiferentná) poloha

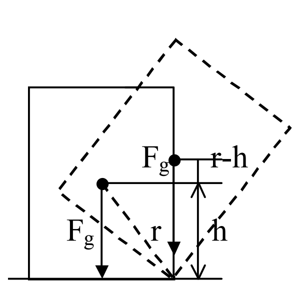
- teleso po vychýlení zostáva v rovnovážnej polohe, ťažisko zostáva v rovnakej výške, potenciálna energia sa nemení





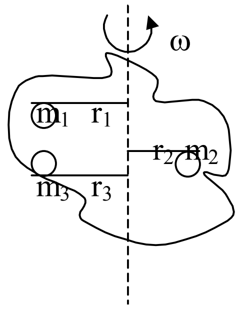
2.2.4 stabilita telesa

- stálosť rovnovážnej polohy podopreného telesa (stabilita telesa) sa meria veľkosťou práce, ktorú musíme vykonať, aby sme teleso prevrátili z rovnovážnej polohy stálej do rovnovážnej polohy vratkej
- stabilita telesa je tým väčšia, čím väčšiu prácu treba vykonať na preklopenie telesa do vratkej polohy
- ťažisko vystúpi o výšku r-h, kde r je vzdialenosť od hrany, okolo ktorej teleso preklápame
  - $W = F_g(r-h)$

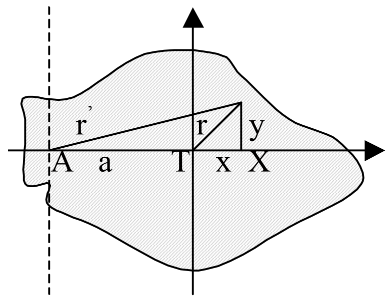


2.3 moment zotrvačnosti

- ***jeden hmotný bod:***
  - hmotný bod má pri rotácii kinetickú energiu, pre ktorú platí:
    - $E_K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mr^2\omega^2 = \frac{1}{2}J\omega^2$
  - pre moment zotrvačnosti platí:
    - $J = mr^2$, $[J] = kg.m^2$
- ***sústava hmotných bodov:***
  - sústava hmotných bodov má kinetickú energiu
    - $\sum_{i=1}^{n} E_{Ki} = \frac{1}{2}m_1 r_1^2\omega^2 + \frac{1}{2}m_2 r_2^2\omega^2 + \cdots + \frac{1}{2}m_n r_n^2\omega^2 = \frac{1}{2}\left(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \cdots + m_n r_n^2\right)\omega^2$
  - moment zotrvačnosti
    - $J = J_1 + J_2 + \cdots + J_n = \sum_{i=1}^{n} J_i = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$



- ***tuhé teleso:***
  - pre moment zotrvačnosti telesa platí:
    - ; $J = \int_V r^2.dm = \int_V \rho r^2.dV$
  - momenty zotrvačnosti niektorých telies vzhľadom na os prechádzajúcu ťažiskom:
    - guľa: $\frac{2}{5}Mr^2$
    - valec: $\frac{1}{2}Mr^2$
    - tyč: $\frac{1}{12}Ml^2$
- ***Steinerova veta:***
  - ak moment zotrvačnosti tuhého telesa vzhľadom na os prechádzajúcu ťažiskom je $J^* = \int_V r^2.dm$, potom moment zotrvačnosti vzhľadom na každú os, ktorá je rovnobežná s osou prechádzajúcou ťažiskom 9vzdialenosť osí je *a*) je daná vzťahom:



    - $J = \int r'^2.dm = \int\left[(a+x)^2 + y^2\right]dm = \int a^2.dm + \int \overbrace{2ax.dm}^{súr.ťažiska} + \int \overbrace{\left(x^2+y^2\right)}^{r^2}dm \Rightarrow$
    - $J = a^2\int dm + \int r^2.dm = J^* + Ma^2$

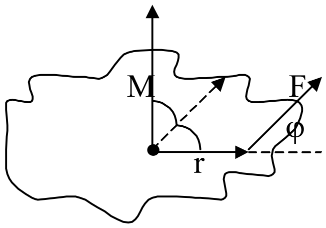
2.4 kinetická energia telesa

- ak teleso koná posuvný pohyb, má kinetickú energiu
  - $E_K = \frac{1}{2}mv^2$
- ak teleso koná rotačný pohyb, má kinetickú energiu
  - $E_K = \frac{1}{2}J\omega^2$
- ak teleso koná posuvný aj rotačný pohyb súčasne, má kinetickú energiu
  - $E_K = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2$

2.5 moment sily a momentová veta

2.5.1 moment sily

- charakterizuje otáčavý účinok sily na teleso vzhľadom na os otáčania
- ***platí:***
  - $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$
- ***veľkosť momentu sily:***
  - $\left|\vec{M}\right| = \left|\vec{r}\right| . \left|\vec{F}\right| . \sin\alpha$, $[M] = N.m$
- ***smer momentu sily:***
  - $\vec{M} \perp \vec{r} \wedge \vec{M} \perp \vec{F}$
  - orientáciu momentu sily určujeme podľa ***pravidla pravej ruky:***
    - keď položíme pravú ruku tak, aby prsty ukazovali prechod od prvého vektora k druhému, odchýlený palec ukazuje smer momentu sily



- keď na tuhé teleso otáčavé okolo nehybnej osi súčasne viac síl, účinok týchto síl na teleso môžeme určiť z výsledného momentu síl, ktorý je daný vektorovým súčtom momentov jednotlivých síl (vzhľadom na danú os):
  - $\vec{M} = \vec{M_1} + \vec{M_2} + \cdots + \vec{M_n}$

2.5.2 momentová veta

- otáčavý účinok síl pôsobiacich na tuhé teleso otáčavé okolo nehybnej osi sa ruší, ak vektorový súčet momentov všetkých síl vzhľadom na os je nulový vektor momentu sily
  - $\vec{M_1} + \vec{M_2} + \cdots + \vec{M_n} = \vec{0}$

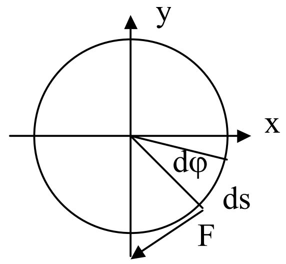
2.6 prvá veta impulzová

- máme teleso zložené z n hmotných bodov, vyberieme si i-tý hmotný bod, na ktorý pôsobia sily (pohybová rovnica jedného hmotného bodu):
  - $\vec{F_i} + \sum_{j=1}^{n} \vec{F_{ji}} = m_i . \vec{a_i}$
    - $\vec{F_i}$ je vonkajšia sila
    - $\sum_{j=1}^{n} \vec{F_{ji}}$ sú vnútorné sily, ktorými pôsobia hmotné body telesa na i-tý hmotný bod
- pre sústavu hmotných bodov platí pohybová rovnica v tvare:
  - $\sum_{i=1}^{n} \vec{F_i} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \vec{F_{ji}} = \sum_{i=1}^{n} m_i . \vec{a_i}$
- môžeme vytvoriť dvojice rovnako veľkých síl opačného smeru, ktoré sa navzájom rušia:
  - $\vec{F_{ij}} = -\vec{F_{ji}} \Rightarrow \vec{F_{ij}} + \vec{F_{ji}} = 0$
- platí:
  - $\sum_{i=1}^{n} \vec{F_i} + \overbrace{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \vec{F_{ji}}}^{0} = \sum_{i=1}^{n} m_i . \vec{a_i} = \sum_{i=1}^{n} m_i . \frac{d\vec{v_i}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}\left(m_i \vec{v_i}\right) = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} \vec{p_i}$
  - $\sum_{i=1}^{n} \vec{F_i} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} \vec{p_i} \Rightarrow \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$
  - je to ***prvá veta impulzová***:
    - vektorový súčet pôsobiacich vonkajších síl sa rovná časovej zmene celkovej hybnosti hmotných bodov

- ak $\vec{F} = 0$, platí ***zákon zachovania hybnosti***:
    - $\vec{p_1} + \vec{p_2} + \cdots + \vec{p_n} = konšt.$

2.7 druhá veta impulzová

- máme teleso zložené z n hmotných bodov, vyberieme si i-tý hmotný bod, na ktorý pôsobia sily (pohybová rovnica jedného hmotného bodu):
    - $\vec{F_i} + \sum_{j=1}^{n} \vec{F_{ji}} = m_i.\vec{a_i}$
- ak rovnicu vynásobíme polohovým vektorom pôsobiacich síl, platí:
    - $\vec{r_i} \times \left(\vec{F_i} + \sum_{j=1}^{n} \vec{F_{ji}} \right) = \vec{r_i} \times m_i.\vec{a_i} = \vec{r_i} \times m_i \frac{d\vec{v_i}}{dt} = \vec{r_i} \times \frac{d}{dt}\left(m_i \vec{v_i} \right) =$
    - $= \frac{d}{dt}\left(\vec{r_i} \times \vec{p_i} \right) - \overbrace{\frac{d\vec{r_i}}{dt} \times \vec{p_i}}^{\vec{0}} = \frac{d}{dt}\vec{L_i}$
    - $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ je ***moment hybnosti***
- ak máme sústavu hmotných bodov, platí:
    - $\sum_{i=1}^{n} \left(\vec{r_i} \times \vec{F_i} \right) + \overbrace{\sum_{i=1}^{n} \left(\vec{r_i} \times \sum_{j=1}^{n} \vec{F_{ji}} \right)}^{0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d\vec{L_i}}{dt}$
- môžeme zostaviť dvojice rovnako veľkých momentov síl opačného smeru, ktoré sa navzájom rušia:
    - $\vec{M_{ij}} = -\vec{M_{ji}} \Rightarrow \vec{M_{ij}} + \vec{M_{ij}} = \vec{0}$
- platí:
    - $\sum_{i=1}^{n} \vec{M_i} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} \vec{L_i} \Rightarrow \vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$
    - je to ***druhá veta impulzová***:
        - vektorový súčet momentov síl sa rovná časovej zmene momentu hybnosti
- ak $\vec{M} = 0$, platí ***zákon zachovania momentu hybnosti***:
    - $\vec{L_1} + \vec{L_2} + \cdots + \vec{L_n} = konšt.$
- pri rotácii platí zákon zachovania momentu hybnosti, ktorého veľkosť môžeme vyjadriť:
    - $L = p.r = mvr = mr^2\omega = J\omega$



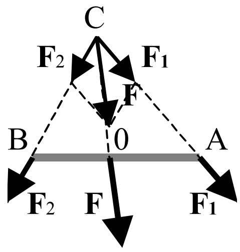
2.8 pohybová rovnica rotujúceho telesa

- ak na teleso pôsobí sila, tak pri malom posune vykoná prácu:
    - $dW = F.ds = Fr.d\varphi = M.d\varphi$
- vykonaná práca spôsobí zmenu kinetickej energie:
    - $dE = d\left(\frac{1}{2} J\omega^2 \right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} J\omega^2 \right) dt = \frac{1}{2} J \frac{d}{dt}\left(\omega^2 \right) dt = \frac{1}{2} J 2\omega \frac{d\omega}{dt} dt = J\omega\varepsilon.dt = J\varepsilon.d\varphi$
- platí:
    - $dW = dE \Rightarrow M.d\varphi = J\varepsilon.d\varphi$
- pohybová rovnica má tvar:
    - $M = J\varepsilon$

2.9 skladanie síl pôsobiacich na tuhé teleso

- skladať sily pôsobiace na tuhé teleso znamená určiť silu, ktorá má na dané teleso účinok ako sily, ktoré skladáme

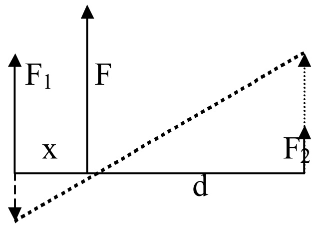
2.9.1 rôznobežné sily



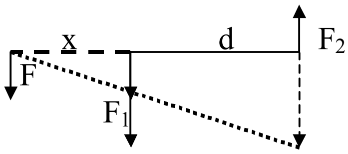
- keď pôsobia dve rôznobežné sily v bodoch A, B, posunieme ich po ich vektorových priamkach do spoločného pôsobiska v bode C. Doplnením na rovnobežník získame výslednicu, ktorú posunieme po jej vektorovej priamke na spojnicu bodov A, B

2.9.2 rovnobežné sily

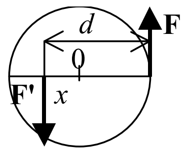
- ***dve sily rovnakého smeru:***
  - pôsobisko sily leží vnútri spojnice síl F_1, F_2, výsledná sila je súčtom pôsobiacich síl
  - platí:
    - $-xF_1 + (d-x)F_2 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{dF_2}{F_1 + F_2}$



- ***dve sily opačného smeru***
  - pôsobisko sily leží na predĺženej spojnici síl F_1, F_2, má smer väčšej sily, jej veľkosť sa rovná rozdielu veľkosti oboch zložiek
  - platí:
    - $(x+d)F_2 - xF_1 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{dF_2}{F_1 - F_2}$



- ***dvojica síl:***
  - dve rovnako veľké rovnobežné sily opačného smeru, ktoré neležia v jednej priamke, nazývame dvojica síl. Výslednica týchto síl je nulová; účinok síl na tuhé teleso nemôžeme nahradiť účinkom jednej sily
  - veľkosť momentu dvojice síl sa vždy rovná súčinu veľkosti jednej sily F a ramena dvojice r. Ramenom nazývame kolmú vzdialenosť vektorových priamok síl dvojice.
    - $M = M_F + M_{F'} \; -F(d-x) + F'x = Fd$



2.10 porovnanie posuvného a otáčavého pohybu

- porovnaním fyzikálnych vzťahov medzi veličinami, ktoré charakterizujú pohyb hmotného bodu (posuvný pohyb tuhého telesa) a otáčavý pohyb tuhého telesa okolo nehybnej voľnej osi, možno dospieť k istým analógiám; pri otáčavom pohybe tuhých telies sa v príslušných vzťahoch vyskytuje namiesto dráhy uhol otočenia, namiesto rýchlosti uhlová rýchlosť, namiesto hmotnosti moment zotrvačnosti, namiesto sily moment sily

Posuvný pohyb		**Otáčavý pohyb**	
dráha	s	uhol otočenia	φ
rýchlosť	$v = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$	uhlová rýchlosť	$\omega = \dfrac{\Delta \varphi}{\Delta t}$
sila	F	moment sily	M
hmotnosť	m	moment zotrvačnosti	J
kinetická energia	$E_k = \dfrac{1}{2} m v^2$	kinetická energia	$E_k = \dfrac{1}{2} J \omega^2$