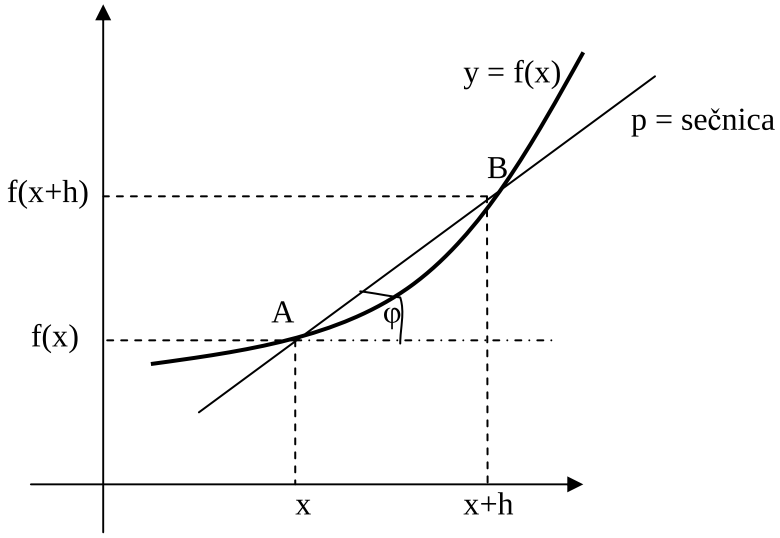
MO 20:

DERIVÁCIA FUNKCIE

Derivácia funkcie

- je smernica dotyčnice ku funkcii v danom bode



A [x; f(x)]
B [x+h; f(x+h)]

$h \in R^+$

<u>sečnica:</u>
$y - y_0 = k.(x - x_0)$

$f(x+h) - f(x) = k.[(x+h) - x]$

$$k = \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h-x)} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- ak B postupne presúvame až splynie s A (h postupne zmenšujeme)
  → limita → zo sečnice sa stane dotyčnica

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

f `(x) = tg φ

- nie vždy však limita, ktorá deriváciu definuje, existuje a je konečná, čiže nie každá funkcia má v každom bode deriváciu
- hovoríme, že funkcia *f* je v bode *x* **diferencovateľná**, ak v tomto bode derivácia existuje; funkcia je diferencovateľná na intervale *I*, ak je diferencovateľná v každom bode tohto intervalu
- funkcia nemá deriváciu v mieste, kde nie je spojitá

MO 20: DERIVÁCIA FUNKCIE

- spojitosť funkcie existenciu derivácie nezaručuje → funkcia môže mať v danom bode zvislú dotyčnicu (čo by zodpovedalo nekonečnej derivácii, čo je nezmysel), prípadne v danom bode nemusí mať dotyčnicu vôbec (v mieste, kde má graf funkcie „špičku“, napr. absolútna hodnota x nemá v bode nula deriváciu). Existujú dokonca funkcie, ktoré sú spojité v každom bode, ale nemajú v žiadnom bode deriváciu (napr. Weierstrassova funkcia)

- Ak je daná funkcia diferencovateľná na nejakom intervale, môžeme na tomto intervale definovať funkciu, ktorá je v každom bode tohto intervalu rovná príslušnej derivácii. Takáto funkcia sa potom označuje prosto ako *derivácia funkcie f*.

- Deriváciou diferencovateľnej funkcie je teda opäť funkcia, ktorá však niekedy môže byť tiež diferencovateľná. Deriváciu derivácie funkce nazývame **druhá derivácia**, deriváciu druhej derivácie **tretia derivácia** atď. Tieto derivácie vyšších rádov sa zvyčajne značia $f''(x)$, $f'''(x)$, pre ešte vyššie rády skôr $f^{(3)}(x)$, $f^{(4)}(x)$ atď

Derivácie niektorých elementárnych funkcií	
Funkcia	**Derivácia**
$f(x) = a$ (a je konštanta)	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^a$ (a je konštanta, $a \neq 0$)	$f'(x) = a.x^{a-1}$
$f(x) = a^x$ (a je konštanta, $a > 0$, $a \neq 1$)	$f'(x) = a^x \ln a$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = \log_a x$ (a je konštanta, $a > 0$, $a \neq 1$)	$f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \mathrm{tg} x$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$
$f(x) = \mathrm{cotg} x$	$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$f(x) = \arcsin x$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \arccos x$	$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \mathrm{arctg} x$	$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$
$f(x) = \mathrm{arccotg} x$	$f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$

MO 20: DERIVÁCIA FUNKCIE

Pravidlá derivovania:

- súčet:
  [f(x) + g(x)]` = f `(x) + g`(x)
- rozdiel:
  [f(x) - g(x)]` = f `(x) - g`(x)
- súčin:
  [f(x).g(x)]` = f `(x).g(x) + f(x).g`(x)
- podiel:
  $$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]^{`} = \frac{f\,`(x).g(x) - f(x).g`(x)}{g^2(x)}$$
- derivácia zloženej funkcie:
  [f(g(x))] = f `(g(x)). g`(x)

Lokálne extrémy:

Ak má daná diferencovateľná funkcia nejaký lokálny extrém (lokálne maximum či minimum), je zrejmé, že jej dotyčnica v tomto bode musí byť vodorovná, čiže derivácia tejto funkcie musí byť v tomto bode nulová.

Prvú deriváciu položíme rovnú nule → korene = kandidáty na lokálne extrémy

→ dosadíme do f ``(x):

- V bodoch, kde je prvá derivácia nulová a druhá derivácia je kladná, sa nachádza *lokálne minimum*.
- V bodoch, kde je prvá derivácia nulová a druhá derivácia je záporná, sa nachádza *lokálne maximum*.
- V bodoch, kde je tak prvá, ako aj druhá derivácia nulová, sa nachádza tzv. *stacionárny bod*, ktorý môže a nemusí byť extrémom.

Analýza správania funkcie :

- V bodoch, kde je prvá derivácia kladná, je funkcia rastúca.
- V bodoch, kde je prvá derivácia záporná, je funkcia klesajúca.
- V bodoch, kde je druhá derivácia kladná, je funkcia konvexná.
- V bodoch, kde je druhá derivácia záporná, je funkcia konkávna.
- V bodoch, kde je druhá derivácia nulová, sa môžu vyskytovať inflexné body.

(Bod, v ktorom sa funkcia mení z konvexnej na konkávnu alebo naopak, voláme inflexný bod.)

pomôcka na zapamätanie: konkávna funkcia – „ do konkávnej kávu nenaleješ“