MO 29:

INTEGRÁLNY POČET

- integrál sa používa na výpočet nepravidelných plôch
- integrálmi sa zaoberali Newton a Leibniz

Pojem primitívnej funkcie

- Nech je daná funkcia y = f(x) na intervale (a,b).
- F(x) sa nazýva primitívnou funkciou funkcie f(x) na intervale (a,b), ak $\forall\, x \in (a,b)$; [F(x)]` = f(x)
- napr. f(x) = x

  $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 5$

  → 5 = integračná konštanta, označujeme ju c
- k funkcii f(x) existuje nekonečne veľa primitívnych funkcií, ktoré sa navzájom líšia o integračnú konštantu c
- F(x) označujeme $\int f(x)dx$
  - napr. $\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + c$

- integrály poznáme:
  - neurčitý integrál

    napr. $\int f(x)dx = F(x)$
  - určitý integrál

    napr. $\int_a^b f(x)\,dx = \text{číslo}$

<u>Neurčitý integrál</u>

- = primitívna funkcia

$\int 1\,dx = x + c$

$\int k\,dx = k.x + c$

$\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + c$

$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$

$\int \frac{1}{x}\,dx = \int x^{-1}\,dx = \ln|x| + c$

$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$

$\int e^x\,dx = e^x + c$

$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \text{arctg}\,x + c$

$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + c$

$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$

$\int \cos x\,dx = \sin x + c$

$\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = tg\, x + c$ $\int \frac{1}{\sin^2 x}\, dx = -\, cotg\, x + c$

$\int tg\, x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx = -\ln|\cos x| + c$ $\int cotg\, x\, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx = \ln|\sin x| + c$

$\int \frac{f`(x)}{f(x)}\, dx = \ln|f(x)| + c$

$\int (f(x) \pm g(x))\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$

- **Metóda Per Partes**

  $\int u(x).v`(x)\, dx = [u(x).v(x)] - \int u`(x).v(x)\, dx$

  napr.

  $\int x.e^x\, dx = x.e^x - \int 1.e^x\, dx = x.e^x - e^x + c$

  $\begin{vmatrix} u = x & v` = e^x \\ u` = 1 & v = e^x \end{vmatrix}$

- **Substitučná metóda**

  napr. $\int 2^{x+2}\, dx$

  - zvolíme si substitúciu, ktorú zderivujeme

    t = x+2

    dt = dx

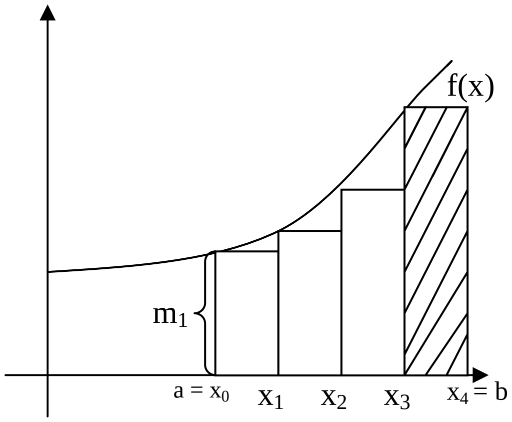
  $\int 2^t\, dt = \frac{2^t}{\ln 2} = \frac{2^{x+2}}{\ln 2} + c$

- **Limitné procesy pri výpočte veľkostí plôch**

  - **Dolný súčet**

    $s(f, D) = m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + ... + m_n(x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})$

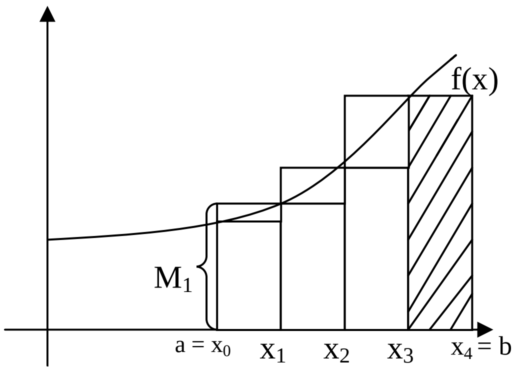
    m_1 = infimum f(x) na <x_0, x_1>



- **Horný súčet**

  $S(f, D) = M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) + ... + M_n(x_n - x_{n-1})$

  M_1 = suprémum f(x) na $\langle x_0, x_1 \rangle$



→ oblasť medzi f(x) a osou x na intervale $\langle a, b \rangle$ sa nazýva **elementárna plocha** S(E)

$$s(f,D) \leq S(E) \leq S(f,D)$$

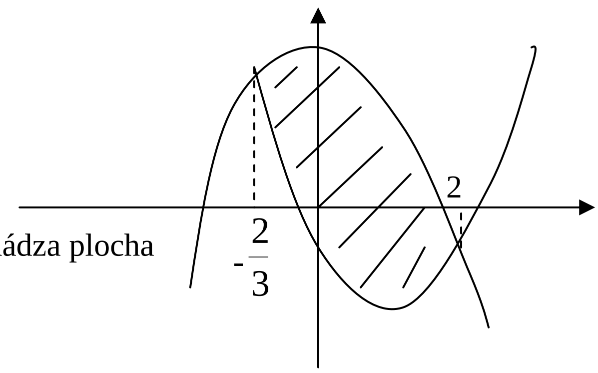
__**Určitý integrál**__

- funkcia f(x) je integrovateľná na intervale $\langle a,b \rangle$
- spoločnú hodnotu horného a dolného integrálu budeme nazývať určitým integrálom funkcie f na intervale $\langle a,b \rangle$ a označovať $\int_a^b f(x)\,dx$
- **Newton – Leibnizova formula**
  - Daná je f(x), ktorá je na intervale $\langle a,b \rangle$ a je integrovateľná.
  - $\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

napr. $\int_1^3 (x^2 + 2)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + 2x + c\right]_1^3 = 9 + 6 + c - \left(\frac{1}{3} + 2 + c\right) = \frac{38}{3}$

- výsledkom určitého integrálu je vždy číslo

- **Plocha ohraničená grafmi funkcií**



napr. f: $y = 2x^2 - 4x$

g: $y = -x^2 + 4$

S(E) = ?

→ vypočítame, na ktorom intervale sa nachádza plocha

$-x^2 + 4 = 2x^2 - 4x$

$0 = (x-2)\left(x + \frac{2}{3}\right)$ → I: $\left\langle -\frac{2}{3}; 2 \right\rangle$

$$S(E) = \int_{-\frac{2}{3}}^{2} ((-x^2 + 4) - (2x^2 - 4x))\,dx$$