

MO 32: KOMBINATORIKA

MO 32:

KOMBINATORIKA

- Daná je konečná neprázdna množina, ktorá má n prvkov, $n \in \mathbb{N}$. Z tejto množiny vyberáme skupinky prvkov a kladieme si otázku:
 - či sa prvky opakujú alebo neopakujú
 - či na poradí záleží alebo nezáleží
- ak záleží na poradí, hovoríme, že tvoríme usporiadané k -tice alebo n -tice

Variácie bez opakovania:

- máme danú množinu $k \in \mathbb{N}$, $k < n$
- ak vyberáme k -tice z n prvkov sú to variácie
- variácie k -tej triedy z n prvkov sú všetky usporiadané k -tice z množiny n
- $V(k,n) = \frac{n!}{(n-k)!}$
- alebo úlohy riešime pomocou súčinu

napr.

Máme číslivce 2,3,5,8. Urobte všetky 3ciferné čísla, pričom prvky sa neopakujú. (Záleží na poradí)

$$V(3,4) = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} = 24$$

$$\underline{4 \text{ prvky}} \quad \underline{3 \text{ prvky}} \quad \underline{2 \text{ prvky}} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$$

napr.

Máme číslivce 0,1,2,5,7,8. Urobte všetky 4-ciferné čísla, pričom prvky sa neopakujú. (Záleží na poradí)

$$V(4,6) - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} V(4,6)$$



možnosť nuly na prvom mieste

$$\underline{5 \text{ prvkov}} \quad \underline{5 \text{ prvkov}} \quad \underline{4 \text{ prvky}} \quad \underline{3 \text{ prvky}} = 5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300$$

napr.

Urobte všetky štvorice, prvky sa neopakujú, čísla sú párne. Máme číslivce: 0,1,2,5,7,8

→ končí na 0:

$$\underline{x} \quad \underline{x} \quad \underline{x} \quad \underline{0}$$

na prvom mieste nemôže byť 0

$$\underline{5} \quad \underline{4} \quad \underline{3} \quad \underline{1}$$

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 = 60$$

MO 32: KOMBINATORIKA

→ končí na 2:

$$\underline{x} \ \underline{x} \ \underline{x} \ \underline{2}$$

na prvom mieste nemôže byť 0, 2

$$\underline{4} \ \underline{4} \ \underline{3} \ \underline{1}$$

$$4.4.3.1 = 48$$

→ končí na 8:

$$\underline{x} \ \underline{x} \ \underline{x} \ \underline{8}$$

na prvom mieste nemôže byť 0, 8

$$\underline{4} \ \underline{4} \ \underline{3} \ \underline{1}$$

$$4.4.3.1 = 48$$

Spolu 156.

Permutácie bez opakovania:

- $k = n$
- vyberáme n-tice z n prvkov, usporiadané prvky
- $P(n) = n!$

napr.

Máme 20 žiakov. Usporiadajte ich do radu.

$$P(20) = 20!$$

Kombinácie bez opakovania

- ak vyberáme k-prvkové podmnožiny danej množiny, prvky sa neopakujú, na poradí nezáleží
- kombinácie k-tej triedy z n prvkov sú všetky k-prvkové podmnožiny množiny n
- $C(k,n) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$
- Variácií je $k!$ viac ako kombinácií

napr.

Máme 20 žiakov. Na súťaž posielame 5 žiakov. (bez priradenia funkcie)

$$C(5,20) = \binom{20}{5}$$

Variácie s opakovaním

- prvky sa opakujú, záleží na poradí
- medzi k a n nie je vzťah
- tvoríme usporiadané k-tice z prvok množiny n, môžu sa opakovať
- $V(k,n) = n^k$

MO 32: KOMBINATORIKA

napr.

Máme číslice:2,3,5,8. Utvorte všetky 3ciferné čísla. Číslice sa môžu opakovať.

$$\underline{4} \underline{4} \underline{4} = 4^3$$

Permutácie s opakovaním

- máme n prvkov, prvky sa vyskytujú p_1, p_2, \dots, p_n -krát; pričom platí $p_1 + p_2 + \dots + p_n = n$
- $P(p_1, p_2, \dots, p_n) = \frac{n!}{p_1! p_2! \dots p_n!}$

napr.

MATEMATIKA. Určte počet všetkých slov, ktoré sa dajú urobiť zo všetkých písmen slova matematika.

A – 3; T – 2; M – 2; I – 1; E – 1; K – 1

$$P(3,2,2,1,1,1) = \frac{10!}{3!2!2!1!1!1!}$$

Kombinácie s opakovaním

- vyberám podmnožiny, prvky sa môžu opakovať
- vzťah medzi k a n nie je
- $C(k, n) = \binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}$

PRIEHRADKOVÝ SPÔSOB RIEŠENIA

napr.

7 jablák máme rozdeliť 4 deťom

```

o o | o | o o o | o
| | | o o o o o o o

```

$$P(3,7) = \frac{10!}{7!3!} = \binom{10}{3} = \binom{10}{7}$$



$$\begin{aligned} 7 &= k = \text{jablák} \\ 10 &= n + k - 1 \\ n &= \text{deti} \end{aligned}$$

Doplnkové kombinačné číslo

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

MO 32: KOMBINATORIKA

Kombinačné číslo

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

$$\binom{n}{0} = 1 = \frac{n!}{(n-0)!0!} = \frac{n!}{n!0!}$$

$$0! = 1$$

$$1! = 1$$

$$\binom{n}{1} = n$$

$\forall n, k \in \mathbb{N}; k < n:$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$