

MO 19: LIMITA FUNKCIE A POSTUPNOSTI

MO 19:

LIMITA FUNKCIE A POSTUPNOSTISpojité funkcie:

- Nech f je funkcia definovaná v nejakom okolí bodu a . Hovoríme, že funkcia f je spojitá v bode a , ak k ľubovoľnému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$, tak, že pre všetky x pre ktoré platí $|x - a| < \delta$, platí $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.
- Spojitá funkcia – funkcia je spojitá v bode x_0 ak platí: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Limita funkcie:

- Nech funkcia f je definovaná v nejakom rýdzom okolí bodu a . Hovoríme, že limita funkcie f v bode a sa rovná číslu b , ak pre každú konvergentnú postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ takú, že $a_n \in D(f) - \{a\}$, $a_n \rightarrow a$ platí, že postupnosť $f(a_n)$ je tiež konvergentná a $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = b$. Vtedy píšeme $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$.
- Limita funkcie f v bode a sa rovná číslu b , ak pre každé (ľubovoľne malé) číslo $\varepsilon > 0$ existuje také číslo $\delta > 0$, že pre všetky x z rýdzeho δ -okolía bodu a (t.j. z množiny $(a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$) je hodnota $f(x)$ z ε -okolía bodu b , t.j. $|f(x) - b| < \varepsilon$.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b; \forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0; \forall x; |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

- Funkcia f definovaná na intervale $(a-d, a)$ má v bode a **limitu zľava**, ak pre každú postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ čísel z tohto intervalu, ktorá konverguje k a platí $f(a_n) \rightarrow b$. Vtedy píšeme $\lim_{n \rightarrow a^-} f(x) = b$.
- Funkcia f definovaná na intervale $(a, a+d)$ má v bode a **limitu sprava**, ak pre každú postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ čísel z tohto intervalu, ktorá konverguje k a platí $f(a_n) \rightarrow b$. Vtedy píšeme $\lim_{n \rightarrow a^+} f(x) = b$.
- **Veta:** Funkcia f má v bode a limitu práve vtedy, keď má v tomto bode limitu zľava aj limitu sprava a tieto dve limity sa rovnajú.
- Uvedené definície a vety možno prirodzeným spôsobom rozšíriť aj na nevlastné limity.
- Tak napríklad funkcia $y = \frac{1}{x}$ má v bode $x=0$ nevlastnú limitu, ktorá sa sprava rovná $+\infty$, pretože pre každú postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ takú, že $x_n \rightarrow 0$ a $x_n > 0$ platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = +\infty$.

(Limita postupnosti a funkcie – nech f je funkcia definovaná v okolí bodu a , prípadne okrem bodu a , potom funkcia f má v bode a limitu L , ak k ľubovoľnému bodu L , \square okolie bodu a tak, že pre $\square x \in$ okoliu a , $x \neq a$, platí: $f(x) \in$ okoliu L).

MO 19: LIMITA FUNKCIE A POSTUPNOSTI**Nevlastná limita**

- je limita v bodoch $\pm \infty$

Limita postupnosti:

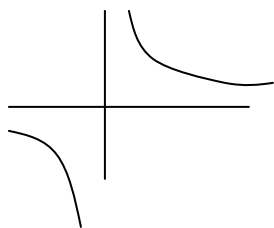
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ práve vtedy, keď ku každému kladnému reálnemu číslu ε existuje také $n \in \mathbb{N}$, že všetky členy danej postupnosti začínajúc členom $a_n + 1$ patria do intervalu $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.
- Postupnosťou reálnych čísel rozumieme zobrazenie $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Namiesto $f(n)$ zvyčajne píšeme a_n , postupnosť označujeme $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Konvergenca:

- Hovoríme, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **konverguje** k číslu a , ak ku každému (ľubovoľnému malému) číslu $\varepsilon > 0$ existuje také $n_0 \in \mathbb{N}$, že pre každý člen postupnosti s indexom $n \geq n_0$ platí $|a_n - a| < \varepsilon$. Vtedy píšeme $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ (alebo stručne $a_n \rightarrow a$).
- Postupnosť nazývame **konvergentnou**, ak má limitu, v opačnom prípade ju nazývame **ivergentnou**.

Príklady funkcií nespojitých v bode:

$$y = \frac{1}{x}$$



táto fcia nie je spojitá v bode a , ale má limitu v bode a , je to zabezpečené rýdzim okolím

Funkcia spojitá v bode, ale nemá limitu: