

MO 15: POSTUPNOSTI

MO 15:

POSTUPNOSTI**Postupnosť** – funkcia definovaná na množine všetkých prirodzených čísel

$$f(n) = a_n \quad \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

- **konečná** – ak poznáme množinu čísel, na ktorej je definovaná

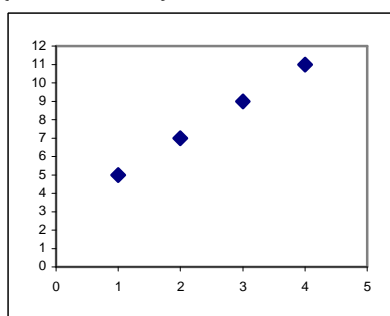
$$\{a_n\}_{n=1}^k$$

- **nekonečná**

Graf postupnosti – množina izolovaných bodov

$$a_n = 2n + 3$$

$$\{5, 7, 9, 11, \dots\}$$

**Zadanie postupnosti:**

- predpisom
- vymenovaním prvkov
- graficky
- rekurentne – poznáme 1 alebo viac členov a zároveň predpis, pomocou ktorého si vieme odvodiť ďalšie členy

$$a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$$

Fibonachiho postupnosť:

$$\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots\}$$

$$a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$$

Rastúca postupnosť:

$$\forall n \in \mathbb{N}; a_{n+1} > a_n$$

Klesajúca postupnosť:

$$\forall n \in \mathbb{N}; a_{n+1} < a_n$$

} monotónne

Nerastúca postupnosť:

$$\forall n \in \mathbb{N}; a_{n+1} \leq a_n$$

Neklesajúca postupnosť:

$$\forall n \in \mathbb{N}; a_{n+1} \geq a_n$$

Konštantná postupnosť

MO 15: POSTUPNOSTI

$\forall n \in \mathbb{N}; a_{n+1} = a_n$ \longrightarrow nerastúca a neklesajúca - monotónna
Ohraničenosť – postupnosť je ohraničená, ak je ohraničená zhora aj zdola

ohraničená zhora

$$\exists h \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}; a_n \leq h$$

ohraničená zdola

$$\exists d \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}; a_n \geq d$$

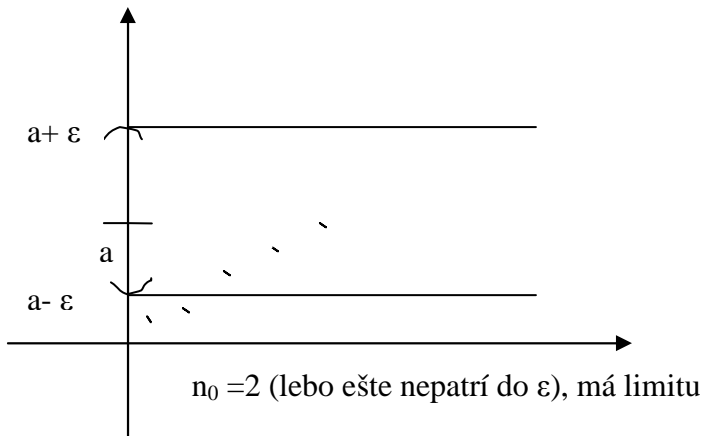
Limita postupnosti:

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu $a \in \mathbb{R}; \forall \varepsilon > 0; \exists n_0 \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}; n > n_0; |a_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon.$$

Zapíšeme: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$

ε = okolie bodu a



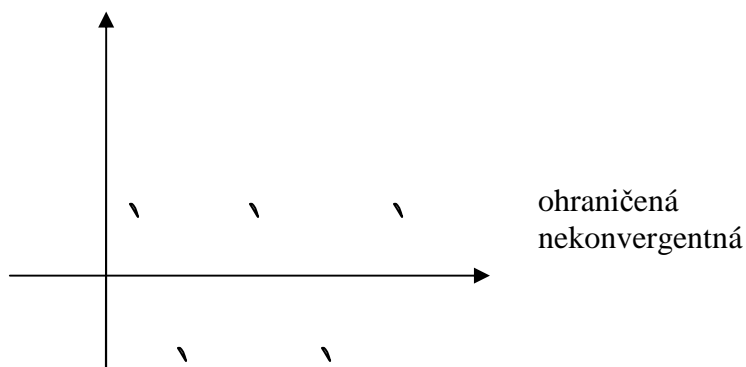
Ak má postupnosť limitu – **konvergentná**.

Ak nemá postupnosť limitu – **divergentná**.

Postupnosť má najviac jednu limitu.

Každá konštantná postupnosť je konvergentná.

$$a_n = c; \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$$



- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}; \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$

MO 15: POSTUPNOSTI

- ak sú obe konvergentné platí: $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$
- pri delení treba určiť podmienku: $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ je nenulová