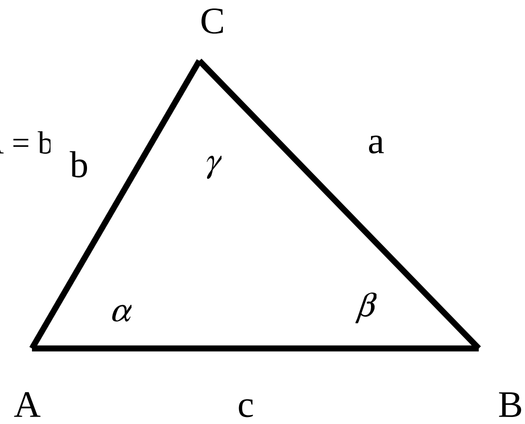
MO 35:

TROJUHOLNÍK

Trojuholník:

- patrí k základným geometrickým útvarom
- Nech A, B, C sú 3 rôzne body v rovine, ktoré neležia na jednej priamky. Potom trojuholníkom s vrcholmi A, B, C nazývame prienik 3 polrovín ($\xrightarrow[ABC]{}, \xrightarrow[ACB]{}, \xrightarrow[BCA]{}$) .



Strany trojuholníka:

- stranami trojuholníka nazývame úsečky AB = c, BC = a, CA = b
    - ich zjednotenie tvorí obvod trojuholníka

Vnútorné uhly trojuholníka:

- vnútorné uhly trojuholníka pri vrcholoch A, B, C sa nazývajú konvexné uhly BAC = α, ABC = β, BCA = γ

Typy trojuholníkov:

- Podľa veľkosti najväčšieho vnútorného uhla delíme trojuholníky na **ostrouhlé, pravouhlé** a **tupouhlé**.

- Podľa vzájomných pomerov dĺžok strán rozoznávame **všeobecné**, **rovnoramenné** a **rovnostranné** trojuholníky.

Termín všeobecný zvyčajne znamená, že pri trojuholníku nepredpokladáme žiadne špecifické vlastnosti, t.j. nie je pravouhlý, rovnoramenný ani rovnostranný apod.

V každom trojuholníku platí:

- súčet veľkostí vnútorných uhlov je 180 º (π radiánov)
- oproti väčšej strane leží väčší uhol a naopak
- trojuholníková nerovnosť
- sínusová a kosínusová veta

Trojuholníková nerovnosť:

- súčet dĺžok ľubovoľných 2 strán je väčší ako dĺžka tretej strany

    - $a + b > c$
$b + c > a$
$a + c > b$
    - $| a – b | < c$
$| b – c | < a$
$| a – c | < b$

Obvod trojuholníka rovná súčtu dĺžok jeho strán

- $O = a + b + c$

MO 35: TROJUHOLNÍK

Obsah trojuholníka môžeme vypočítať rôznymi spôsobmi:

- $S = \frac{a.v_a}{2} = \frac{b.v_b}{2} = \frac{c.v_c}{2}$, kde v_a, v_b, v_c sú výšky na príslušné strany $\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{v_b}{v_a}$
- $S = \frac{a.b.\sin\gamma}{2}$, kde γ je veľkosť uhla, ktorý zvierajú strany a, b
- $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, kde $s = \frac{a+b+c}{2}$. tzv. Herónov vzorec
- $S = \rho.s$, $\rho = \frac{S}{s}$; ρ je polomer vpísanej kružnice

Sínusová veta:

- $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r$, kde r je polomer opísanej kružnice trojuholníku
- sínusová veta umožňuje napríklad vypočítať veľkosť tretej strany trojuholníka, ak poznáme 2 strany a uhol nimi zovretý, prípadne uhol proti väčšej z nich

Kosínusová veta:

- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$
- kosínusová veta umožňuje napríklad určiť veľkosti uhlov trojuholníka , ak poznáme dĺžky jeho 3 strán

Výška trojuholníka:

- označuje priamku prechádzajúcu vrcholom trojuholníka a kolmú na protiľahlú stranu.
    - všetky 3 takéto priamky sa pretínajú v jednom bode – **ortocentrum**.
- označuje úsečku, ktorej jedným koncovým bodom je vrchol trojuholníka a druhým päta kolmice zostrojenej z tohto vrchola na protiľahlú stranu.
- *číslo* udávajúce veľkosť úsečky (popísaná v predchádzajúcom bode)

$$av_a = bv_b = cv_c \quad \Rightarrow \quad a:b:c = \frac{1}{v_a}:\frac{1}{v_b}:\frac{1}{v_c}$$

Tento vzťah sa využíva napríklad na konštrukciu trojuholníka, keď sú dané jeho 3 výšky (avšak v prípade, že dané 3 výšky spĺňajú trojuholníkovú nerovnosť, čo nemusí vždy platiť).

MO 35: TROJUHOLNÍK

Ťažnica trojuholníka:

- ťažnicami trojuholníka nazývame spojnice vrcholov so stredmi protiľahlých strán
    - označujeme ich t_a **,** t_b , t_c .
- ťažnice v každom trojuholníku prechádzajú jedným bodom, tzv. **ťažiskom**.
    - Ťažisko delí každú z ťažníc v pomere 2 : 1, pričom dlhšia časť je medzi vrcholom a ťažiskom, kratšia medzi ťažiskom a stredom strany.

Osi strán:

- osami strán nazývame priamky, ktoré sú osami úsečiek tvoriacich strany trojuholníka

- v každom trojuholníku prechádzajú osi strán jedným bodom, ktorý je **stredom kružnice opísanej trojuholníku**, t.j. kružnice prechádzajúcej jeho tromi vrcholmi
- v ostrouhlom trojuholníku sa osi strán pretínajú vnútri trojuholníka
- v pravouhlom trojuholníku sa osi strán pretínajú v strede prepony
- v tupouhlom trojuholníku sa osi strán pretínajú mimo trojuholníka

    - Pre polomer *r* opísanej kružnice platia vzťahy:
        - $r = \frac{a}{2\sin\alpha} = \frac{b}{2\sin\beta} = \frac{c}{2\sin\gamma}, \quad r = \frac{abc}{4S}$
        - špeciálne v rovnostrannom trojuholníku so stranou *a* platí $r = \frac{a}{3}\sqrt{3}$

Osi uhlov:

- osi (vnútorných) uhlov sa v ľubovoľnom trojuholníku pretínajú v jednom bode, ktorý je stredom kružnice vpísanej trojuholníku, t.j. kružnice ležiacej vnútri trojuholníka a dotýkajúcej sa všetkých 3 jeho strán
    - stred vpísanej kružnice leží vždy vnútri trojuholníka
    - pre polomer ρ vpísanej kružnice platí vzťah $\rho = \frac{2S}{o}$,

      kde *S* je obsah a *o* obvod trojuholníka
    - špeciálne v pravouhlom trojuholníku platí $\rho = \frac{a}{6}\sqrt{3}$, kde *a* je dĺžka strany

Veta o Eulerovej priamke:
V ľubovoľnom trojuholníku, s výnimkou rovnostranného, ležia ortocentrum *O*, ťažisko *T* a stred opísanej kružnice S na jednej (tzv. Eulerovej) priamke, pričom pre ich vzdialenosti platí $|OS| = 2\,|TS|$. V rovnostrannom trojuholníku body *O*, *T*, *S* splývajú.

Veta o Feuerbachovej kružnici 9 bodov. Nech *ABC* je všeobecný trojuholník, *P*, *Q*, *R* nech sú päty jeho výšok, *K*, *L*, *M* nech sú stredy jeho strán, *O* nech je priesečník výšok a *T*, *U*, *V* nech sú postupne stredy úsečiek *AO*, *BO*, *CO*. Potom 9 bodov *P*, *Q*, *R*, *K*, *L*, *M*, *T*, *U* , *V* leží na jednej (tzv. Feuerbachovej) kružnici.

Špeciálne vlastnosti rovnostranného trojuholníka:

- všetky 3 vnútorné uhly majú veľkosť 60 º
- trojuholník má 3 osi súmernosti – sú nimi osi strán
- stred opísanej kružnice, stred vpísanej kružnice, ťažisko a priesečník výšok splývajú do jedného bodu.
- $o = 3a, \quad S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, \quad r = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}, \quad \rho = \frac{a^2\sqrt{3}}{6}$