

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 29: ANALYTICKÁ GEOMETRIA

1. príklad (301/Pr. 2)

Zadanie: Určte vzdialenosť mimobežiek p, q , pričom:

$$\begin{aligned} p: \quad x &= 7 + t & q: \quad x &= 3 - 7s \\ y &= 3 + 2t & y &= 1 + 2s \\ z &= 9 - t; t \in R & z &= 1 + 3s; s \in R \end{aligned}$$

Riešenie:

$$\vec{u}_p = [1, 2, -1]; \quad \vec{u}_q = [-7, 2, 3]$$

$$|XY| = |pq|$$

Hľadáme body X, Y také, že $X \in p \wedge Y \in q \wedge \overline{XY} \perp p \wedge \overline{XY} \perp q$, takže

$$\left(\overline{u_{XY}} \perp \vec{u}_p \wedge \overline{u_{XY}} \perp \vec{u}_q \right) \Rightarrow \overline{u_{XY}} = k \cdot (\vec{u}_p \times \vec{u}_q) = k \cdot [8, 4, 16] = k \cdot [2, 1, 4] \quad (k \in R)$$

Pre smerový vektor \overline{XY} zároveň platí:

$$\overline{u_{XY}} = \overline{XY} = [3 - 7s - 7 - t, 1 + 2s - 3 - 2t, 1 + 3s - 9 + t] = [-4 - 7s - t, -2 + 2s - 2t, -8 + 3s + t]$$

Teraz dostávame tri rovnice o troch neznámych:

$$-4 - 7s - t = 2k$$

$$-2 + 2s - 2t = k$$

$$-8 + 3s + t = 4k$$

$$s = 0 = t; \quad k = -2$$

Do parametrických vyjadrení mimobežiek dosadíme hodnoty s a t a dostaneme body $X[7, 3, 9]$ a $Y[3, 1, 1]$.

$$|pq| = |XY| = \sqrt{16 + 4 + 64} = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}$$

Vzdialenosť mimobežiek p, q je $2\sqrt{21}$.

2. príklad (303/1)

Zadanie: Je daná rovina $\alpha: 2x + 3y - z - 6 = 0$ a priamka $p: x = 1 - t, y = 2 + 2t, z = 4 + 3t, t \in R$.

a) Určte prienik priamky p a roviny α .

b) Napíšte parametrické vyjadrenie pravouhlého priemetu priamky p do roviny α .

Riešenie:

$$\vec{n}_\alpha = [2, 3, -1]$$

$$\vec{u}_p = [-1, 2, 3]$$

a) $\vec{u}_p \cdot \vec{n}_\alpha = 1 \neq 0 \Rightarrow p, \alpha$ nie sú rovnobežné $\Rightarrow p, \alpha$ sú rôznobežné

$$\{P\} = p \cap \alpha$$

Súradnice P:

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 29: ANALYTICKÁ GEOMETRIA

$$2(1-t) + 3(2+2t) - (4+3t) - 6 = 0$$

$$2 - 2t + 6 + 6t - 4 - 3t - 6 = 0$$

$$t = 2 \Rightarrow \underline{\underline{P[-1,6,10]}}$$

Priemik priamky p a roviny α je bod $P[-1,6,10]$.

b) $A \in p; A[1,2,4]$

$$k \perp \alpha \wedge A \in k \Rightarrow k: x = 1 + 2s$$

$$y = 2 + 3s$$

$$z = 4 - s; \quad s \in R$$

$$\{A_K\} = k \cap \alpha$$

Súradnice A_K :

$$2(1+2s) + 3(2+3s) - (4-s) - 6 = 0$$

$$2 + 4s + 6 + 9s - 4 + s - 6 = 0$$

$$s = \frac{1}{7} \Rightarrow A_K \left[\frac{9}{7}, \frac{17}{7}, \frac{27}{7} \right]$$

$$\overrightarrow{PA_K}: x = -1 + \frac{16}{7}k$$

$$y = 6 - \frac{25}{7}k$$

$$z = 10 - \frac{43}{7}k; \quad k \in R$$

$$\overrightarrow{PA_K}: x = -1 + 16k$$

$$y = 6 - 25k$$

$$z = 10 - 43k; \quad k \in R$$

Kolmý priemet priamky p do roviny α je priamka $\overrightarrow{PA_K}$.

3. príklad (303/3)

Zadanie: Napíšte rovnicu priamky q , ktorá prechádza bodom $A[5, \sqrt{3}]$ a zvierá s priamkou $p: x + \sqrt{3}y - 1 = 0$ uhol $\alpha = 60^\circ$.

Riešenie:

$$q: ax + by + c = 0$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2} = \frac{|\vec{n}_q \cdot \vec{n}_p|}{|\vec{n}_q| \cdot |\vec{n}_p|} = \frac{|a + \sqrt{3}b|}{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{1+3}}$$

$$1 = \frac{|a + \sqrt{3}b|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$|a + \sqrt{3}b| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$a^2 + 2ab\sqrt{3} + 3b^2 = a^2 + b^2$$

$$2ab\sqrt{3} + 2b^2 = 0$$

$$2b \cdot (a\sqrt{3} + b) = 0$$

↓

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 29: ANALYTICKÁ GEOMETRIA

$$b = 0 \vee b = -a\sqrt{3}$$

$$\vec{n}_q = [a, 0] \vee \vec{n}_q = [a, -a\sqrt{3}]$$

$$\vec{n}_q = [1, 0] \vee \vec{n}_q = [1, -\sqrt{3}]$$

$$q: x + c = 0 \vee q: x - \sqrt{3}y + c = 0$$

$$A \in q: 5 + c = 0 \vee A \in q: 5 - 3 + c = 0$$

$$c = -5 \vee c = -2$$

Rovnice priamok q_1, q_2 prechádzajúcich bodom $A[5, \sqrt{3}]$ a zvierajúcich s priamkou $p: x + \sqrt{3}y - 1 = 0$ uhol $\alpha = 60^\circ$ sú $q_1: x - 5 = 0$ a $q_2: x - \sqrt{3}y - 2 = 0$.

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 29: ANALYTICKÁ GEOMETRIA

4. príklad (303/6)

Zadanie: Sú dané body $M[-2,3]$, $A[5,-1]$, $B[3,7]$. Nájdite všetky priamky, ktoré prechádzajú bodom M a majú od bodov A, B rovnakú vzdialenosť.

Riešenie:

$$p: ax + by + c = 0$$

$$M \in p \Rightarrow -2a + 3b + c = 0 \Rightarrow c = 2a - 3b$$

$$|Ap| = |Bp| \Rightarrow \frac{|5a - b + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|3a + 7b + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$|5a - b + 2a - 3b| = |3a + 7b + 2a - 3b|$$

$$|7a - 4b| = |5a + 4b|$$

↓

$$2a = 8b \vee 12a = 0$$

$$a = 4 \quad \vee \quad a = 0$$

$$b = 1 \quad \vee \quad b = 1$$

$$p: 4x + y + c = 0 \vee p: y + c = 0$$

$$M \in p \Rightarrow \underline{p: 4x + y + 5 = 0} \vee M \in p \Rightarrow \underline{p: y - 3 = 0}$$

Priamky, ktoré prechádzajú bodom M a majú od bodov A, B rovnakú vzdialenosť sú:

$$p_1: 4x + y + 5 = 0 \text{ a } p_2: y - 3 = 0.$$

5. príklad (304/10)

Zadanie: Určte rovnice dvoch navzájom kolmých priamok, ktoré prechádzajú bodom $A[7,1]$ a od začiatku súradnej sústavy majú rovnakú vzdialenosť.

Riešenie:

$$p \perp q \Rightarrow p: ax + by + c = 0, q: bx - ay + d = 0$$

$$A \in p \Rightarrow 7a + b + c = 0 \Rightarrow c = -7a - b$$

$$A \in q \Rightarrow 7b - a + d = 0 \Rightarrow d = a - 7b$$

$$|Op| = |Oq| \Rightarrow \frac{|-7a - b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|a - 7b|}{\sqrt{b^2 + (-a)^2}} \Rightarrow |-7a - b| = |a - 7b|$$

↓

$$7a + b = a - 7b \vee 7a + b = 7b - a$$

$$6a = -8b \vee 8a = 6b$$

$$a = -\frac{4}{3}b \vee a = \frac{3}{4}b$$

$$p: 4x - 3y + c = 0 \quad \vee \quad p: 3x + 4y + c = 0$$

$$q: -3x - 4y + d = 0 \quad \vee \quad q: 4x - 3y + d = 0$$

$$q: 3x + 4y + d = 0 \quad \vee \quad p: 3x + 4y + c = 0$$

$$p: 4x - 3y + c = 0 \quad \vee \quad q: 4x - 3y + d = 0$$

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 29: ANALYTICKÁ GEOMETRIA

$$p: 3x + 4y + c = 0, \quad q: 4x - 3y + d = 0$$

$$A \in p \Rightarrow \underline{p: 3x + 4y - 25 = 0}$$

$$A \in q \Rightarrow \underline{q: 4x - 3y - 25 = 0}$$

Rovnice dvoch navzájom kolmých priamok, ktoré prechádzajú bodom $A[7,1]$ a od začiatku súradnej sústavy majú rovnakú vzdialenosť sú $p: 3x + 4y - 25 = 0$ a $q: 4x - 3y - 25 = 0$.