Autor: Martin Slota

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 14: DERIVÁCIE

1. príklad (150/Pr. 2)

Zadanie: Nájdite valec s povrchom $100\ \mathrm{cm}^2$, ktorý má najväčší objem.

Riešenie:

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r v \Rightarrow v = \frac{100 - 2\pi r^2}{2\pi r}$$

$$V = \pi r^2 v = \pi r^2 \frac{100 - 2\pi r^2}{2\pi r} = 50r - \pi r^3 \qquad r \in (0, \infty)$$

$$V'(r) = 50 - 3\pi r^2$$

$$V'(r) = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt{\frac{50}{3\pi}}$$

$V''(r) = -6\pi r < 0 \Rightarrow$ v bode $r = \sqrt{\frac{50}{3\pi}}$ je lokálne maximum. Keďže funkcia V rastie na intervale $\left(0, \sqrt{\frac{50}{3\pi}}\right\rangle$ a klesá na intervale $\left\langle \sqrt{\frac{50}{3\pi}}, \infty\right)$, je v bode $\underline{\underline{r = \sqrt{\frac{50}{3\pi}}}}$ aj globálne maximum.

$$\underline{\underline{v}} = \frac{100 - 2\pi\frac{50}{3\pi}}{2\pi\sqrt{\frac{50}{3\pi}}} = \frac{20}{\sqrt{6\pi}} = \underline{\underline{2r}}$$

Spomedzi všetkých valcov s povrchom $100\ \mathrm{cm}^2$ má najväčší objem valec s polomerom $r = \sqrt{\frac{50}{3\pi}}$ a výškou $v = 2r$.

2. príklad (153/8)

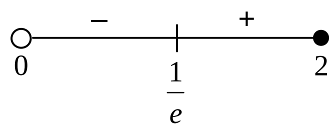
Zadanie: Nájdite globálne extrémy funkcie $f: y = x^{2x}$ na intervale $(0,2\rangle$.

Riešenie:

Platí: $x = e^{\ln x}$.

$$f: y = \left(e^{\ln x}\right)^{2x} = e^{2x\ln x}$$

$$f'(x) = e^{2x\ln x} \cdot (2x\ln x)' = x^{2x} \cdot \left(2\ln x + 2x\frac{1}{x}\right) = 2x^{2x} \cdot (\ln x + 1)$$



Keďže x^{2x} je pre $x \in (0,2\rangle$ vždy kladné $\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1}$

Lokálne (na danom intervale aj globálne) minimum je v bode $\underline{\underline{\left[\frac{1}{e}, \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{2}{e}}\right]}}$.

Globálne maximum môže byť buď v bode $[2, f(2)]$ alebo veľmi blízko k 0.

Autor: Martin Slota

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 14: DERIVÁCIE

$$\left.\begin{aligned} &f(2) = 2^4 = 16 \\ &\lim_{x\to 0^+} x^{2x} = \lim_{x\to 0^+} e^{2x\ln x} = e^{2\cdot 0\cdot(-\infty)} = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$ globálne maximum je v bode $\underline{\underline{[2{,}16]}}$.

3. príklad (153/11)

Zadanie: Pod akým uhlom pretína graf funkcie $f: y = \ln\left(1 + \frac{x}{\sqrt{3}}\right)$ os x?

Riešenie:

$\left(\ln\left(1+\frac{x}{\sqrt{3}}\right) = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{x}{\sqrt{3}} = 1 \Leftrightarrow x = 0\right) \Rightarrow$ bod, v ktorom graf funkcie f pretína os x je $[0{,}0]$.

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{1+\frac{x}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+x} = \frac{1}{\sqrt{3}+x}$$

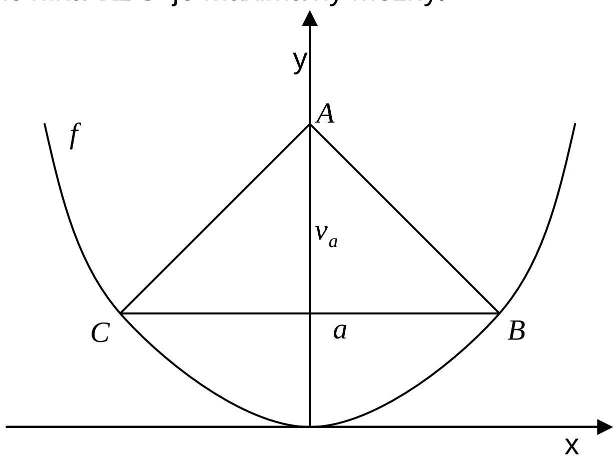
$$\left(f'(0) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = k = \operatorname{tg}\varphi\right) \Rightarrow \underline{\underline{\varphi = \frac{\pi}{6} = 30^\circ}}$$

Graf funkcie f pretína os x pod uhlom $\varphi = 30^\circ$.

4. príklad (154/13)

Zadanie: V karteziánskej súradnicovej sústave je nakreslený graf funkcie $f: y = x^2 \in \langle -3{,}3 \rangle$. Označme A bod $[0{,}9]$. Nájdite na grafe funkcie f body B, C také, že ABC je rovnoramenný trojuholník so základňou BC rovnobežnou s osou x a obsah trojuholníka ABC je maximálny možný.

Riešenie:



$B[x_B, y_B], C[x_C, y_C]$

BC je rovnobežné s osou x $\Rightarrow y_B = y_C = y$

$(\Delta ABC$ je rovnoramenný $\wedge\, y_B = y_C \wedge x_A = 0) \Rightarrow$

$\Rightarrow x_B = -x_C \Rightarrow |x_B| = |x_C| = x$

$y = x^2$

$$S = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{2x\cdot(9-y)}{2} = x\cdot(9-x^2) = 9x - x^3$$

$S'(x) = 9 - 3x^2$

$S'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \sqrt{3}$

$S''(x) = -6x \Rightarrow$ v bode $\underline{\underline{x = \sqrt{3}}}$ je lokálne (na danom intervale aj globálne) maximum.

$\underline{\underline{y}} = (\sqrt{3})^2 = \underline{\underline{3}}$

Súradnice bodov B, C takých, že obsah trojuholníka ABC je maximálny možný sú $B[\sqrt{3}, 3]$ a $C[-\sqrt{3}, 3]$.

Autor: Martin Slota

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 14: DERIVÁCIE

5. príklad (154/25)

Zadanie: Dokážte, že ak má funkcia f na intervale (a,b) ohraničenú deriváciu, je na tomto intervale ohraničená.

Dôkaz (priamy):

Nech funkcia f má na (a,b) ohraničenú deriváciu. Potom $\exists k \in R^+ \forall x \in (a,b); |f'(x)| \leq k$.

Platí: $|a+b| \leq |a| + |b|$

$\forall x, x_0 \in (a,b); \underline{|f(x)|} = |f(x) - f(x_0) + f(x_0)| \leq |f(x) - f(x_0)| + |f(x_0)| \underset{\text{Lagr. v.}}{=} |f'(c) \cdot (x - x_0)| + |f(x_0)| =$

$= \underline{|f'(c)| \cdot |(x - x_0)| + |f(x_0)|}$, kde c je medzi x, x_0, čiže $c \in (a,b)$.

$\left(|f'(c)| \leq k \wedge |x - x_0| < |a-b| \wedge |f(x_0)| \in R^+\right) \Rightarrow \underline{\underline{|f(x)|}} \leq |f'(c)| \cdot |(x - x_0)| + |f(x_0)| \underline{\underline{< k \cdot |a-b| + |f(x_0)| \in R^+}} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ funkcia f je ohraničená na intervale (a,b) ČBTD.