

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 11: EXPONENCIÁLNE A LOGARITMICKÉ FUNKCIE

1. príklad (118/2 e)

Zadanie: Riešte v R rovnicu $a^{x-1} + ba^{x+1} = ab^{x-2} + a^3b^{x-1}$ ($a, b \in R^+$).

Riešenie:

$$\begin{aligned} a^{x-1} + ba^{x+1} &= ab^{x-2} + a^3b^{x-1} \\ a^{x-1} \cdot (1 + ba^2) &= ab^{x-2} \cdot (1 + a^2b) \quad ((1 + a^2b) \neq 0) \\ a^{x-1} &= ab^{x-2} \\ \left(\frac{a}{b}\right)^{x-2} &= 1 \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{a = b \Rightarrow x \in R}}$$

$$\underline{\underline{a \neq b \Rightarrow x = 2}}$$

2. príklad (118/5)

Zadanie: Riešte v $R \times R$ sústavu:

$$\begin{aligned} x^{y+1} &= 125 \\ \left(\frac{1}{x}\right)^{y-1} &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Riešenie:

$$x^{y+1} = 125$$

$$\underline{\underline{\left(\frac{1}{x}\right)^{y-1} = \frac{1}{5}}}$$

$$x^{y+1} = 125$$

$$\underline{\underline{x^{y-1} = 5}}$$

$$\left. \begin{aligned} x^{y+1} &= 125 \\ x^{y+1} &= 5x^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 5x^2 = 125 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm 5$$

$$x = 5 \Rightarrow 5^{y-1} = 5 \Rightarrow y = 2 \left. \vphantom{x = 5} \right\} \Rightarrow K = \{[5, 2]\}$$
$$x = -5 \Rightarrow (-1)^{y-1} \cdot 5^{y-1} = 5 \Rightarrow (y = 2 \wedge y \text{ je nepárne}) \Rightarrow \cancel{y}$$

3. príklad (119/13)

Zadanie: Je daná funkcia $f : y = \frac{10^x - 10^{-x}}{10^x + 10^{-x}} + 1$. Dokážte, že f je prostá a určte k nej inverznú funkciu.

Riešenie:

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 11: EXPONENCIÁLNE A LOGARITMICKÉ FUNKCIE

Najprv si funkciu upravíme: $f : y = \frac{10^x - 10^{-x}}{10^x + 10^{-x}} + 1 = \frac{10^x - 10^{-x} + 10^x + 10^{-x}}{10^x + 10^{-x}} = \frac{2 \cdot 10^x}{10^x + 10^{-x}}$

Teraz sformulujeme tvrdenie, ktoré chceme dokázať: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}; (x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$.

Dôkaz (sporom):

$$\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R}; (x_1 \neq x_2 \wedge f(x_1) = f(x_2)) \Rightarrow \frac{2 \cdot 10^{x_1}}{10^{x_1} + 10^{-x_1}} = \frac{2 \cdot 10^{x_2}}{10^{x_2} + 10^{-x_2}} \Rightarrow 10^{x_1+x_2} + 10^{x_1-x_2} =$$

$$= 10^{x_2+x_1} + 10^{x_2-x_1} \Rightarrow x_1 - x_2 = x_2 - x_1 \Rightarrow x_1 = x_2 \rightarrow \text{spor s predpokladom} \Rightarrow \text{funkcia je prostá ČBTD.}$$

Určenie predpisu inverznej funkcie:

$$f : y = \frac{2 \cdot 10^x}{10^x + 10^{-x}} \Rightarrow f^{-1} : x = \frac{2 \cdot 10^y}{10^y + 10^{-y}} \Rightarrow x \cdot 10^y + x \cdot 10^{-y} = 2 \cdot 10^y \Rightarrow x \cdot 10^{2y} + x = 2 \cdot 10^{2y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = (2 - x) \cdot 10^{2y} \Rightarrow \frac{x}{2 - x} = 10^{2y} \Rightarrow \log \frac{x}{2 - x} = 2y \Rightarrow f^{-1} : y = \frac{1}{2} \log \frac{x}{2 - x}$$

Ešte musíme určiť definičný obor inverznej funkcie:

$$\frac{x}{2 - x} > 0 \Rightarrow ((x > 0) \wedge (2 - x > 0)) \vee ((x < 0) \wedge (2 - x < 0)) \Rightarrow ((x > 0) \wedge (2 > x)) \vee ((x < 0) \wedge (2 < x)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x \in (0, 2)}}$$

4. príklad (119/10)

Zadanie: Nájdite $\log_6 16$, ak viete, že $\log_{12} 27 = a$.

Riešenie:

$$a = \log_{12} 27 = \log_{12} 3^3 = \frac{\log_3 3^3}{\log_3 12} = \frac{3}{\log_3 3 + \log_3 4} = \frac{3}{1 + 2 \cdot \log_3 2} \Rightarrow \log_3 2 = \frac{3 - a}{2a}$$

$$\underline{\underline{\log_6 16}} = 4 \cdot \log_6 2 = 4 \cdot \frac{\log_3 2}{\log_3 6} = 4 \cdot \frac{\log_3 2}{\log_3 3 + \log_3 2} = 4 \cdot \frac{\frac{3 - a}{2a}}{1 + \frac{3 - a}{2a}} = \frac{6 - 2a}{a + 3} = \frac{2a \cdot (6 - 2a)}{a \cdot (a + 3)} = \underline{\underline{\frac{4 \cdot (3 - a)}{a + 3}}}$$

5. príklad (119/17)

Zadanie: Riešte v \mathbb{R} rovnicu $\log_3 \log_8 \log_2 (x + 9) = \log_3 2 - 1$.

Riešenie:

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 11: EXPONENCIÁLNE A LOGARITMICKÉ FUNKCIE

$$\log_3 \log_8 \log_2(x+9) = \log_3 2 - 1$$

$$\log_3 \log_8 \log_2(x+9) = \log_3 2 - \log_3 3$$

$$\log_3 \log_8 \log_2(x+9) = \log_3 \frac{2}{3}$$

$$\log_8 \log_2(x+9) = \frac{2}{3}$$

$$\log_8 \log_2(x+9) = \log_8 8^{\frac{2}{3}}$$

$$\log_2(x+9) = 4$$

$$\log_2(x+9) = \log_2 2^4$$

$$x+9 = 16$$

$$x = 7$$

$$\underline{\underline{K = \{7\}}}$$