

## MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

### **MATURITNÝ OKRUH 9: FUNKCIE**

#### **1. príklad (103/3)**

Zadanie: Určte intervaly monotónnosti a obor funkčných hodnôt funkcie  $f : y = e^{\frac{-x^2}{2}}$ .

Riešenie:

$$f'(x) = -2 \frac{x}{2} e^{\frac{-x^2}{2}} = -x \cdot e^{\frac{-x^2}{2}}$$

Keďže  $e^{\frac{-x^2}{2}}$  je vždy kladné, funkcia  $f$  je rastúca, keď je  $x < 0$  (vtedy je  $-x > 0$  a  $f'$  je teda kladná), a klesajúca, keď je  $x > 0$  (vtedy je  $-x < 0$  a  $f'$  je teda záporná).

Funkcia  $f$  je rastúca na intervale  $(-\infty, 0)$  a klesajúca na intervale  $\langle 0, \infty$ .

Funkcia  $f$  má lokálne (aj globálne) maximum v bode  $[0, 1]$ . Preto jej funkčná hodnota nestúpa nad

bod 1 a neklesá pod bod 0, pretože  $e^{\frac{-x^2}{2}} > 0$ .

Obor funkčných hodnôt funkcie  $f$  je teda  $H(f) = (0, 1]$ .

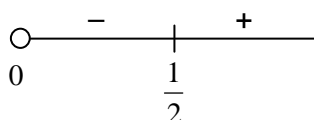
#### **2. príklad (103/8)**

Zadanie: Nájdite intervaly monotónnosti funkcie  $f : y = 2x^2 - \ln x$ .

Riešenie:

$$D(f) = \mathbb{R}^+$$

$$f'(x) = 4x - \frac{1}{x} = \frac{4x^2 - 1}{x} = \frac{(2x-1) \cdot (2x+1)}{x}$$



Keďže berieme do úvahy iba kladné hodnoty, je funkcia rastúca na intervale  $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$  a klesajúca na

intervale  $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ .

#### **3. príklad (103/10)**

Zadanie: Je daná funkcia  $f : y = (x-2)^2 \cdot |x-5|$ . Na základe grafu  $f$  rozhodnite, pre ktoré reálne  $p$  má rovnica  $(x-2)^2 \cdot |x-5| = p$  práve štyri korene.

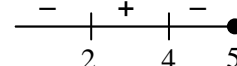
Riešenie:

Nulové body má funkcia  $f$  v bodoch 2 a 5.

$$x \in (-\infty, 5):$$

$$f : y = (x^2 - 4x + 4) \cdot (5 - x) = 5x^2 - 20x + 20 - x^3 + 4x^2 - 4x = -x^3 + 9x^2 - 24x + 20$$

$$f'(x) = -3x^2 + 18x - 24 = -3 \cdot (x^2 - 6x + 8) = -3 \cdot (x-4) \cdot (x-2)$$



Funkcia  $f$  je rastúca na intervale  $\langle 2, 4 \rangle$  a klesajúca na intervaloch  $(-\infty, 2)$  a  $\langle 4, 5 \rangle$ .

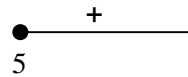
## MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

### MATURITNÝ OKRUH 9: FUNKCIE

$x \in \langle 5, \infty \rangle$ :

$$f : y = (x^2 - 4x + 4) \cdot (x - 5) = x^3 - 4x^2 + 4x - 5x^2 + 20x - 20 = x^3 - 9x^2 + 24x - 20$$

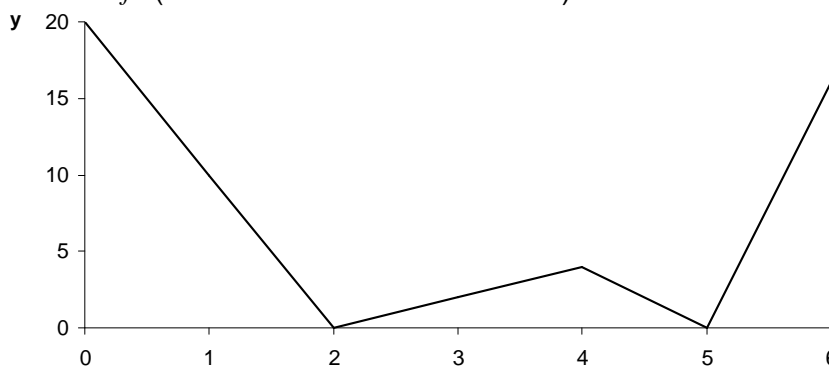
$$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24 = 3 \cdot (x^2 - 6x + 8) = 3 \cdot (x - 4) \cdot (x - 2)$$



Funkcia  $f$  je rastúca na intervale  $\langle 5, \infty \rangle$ .

Funkcia  $f$  má v bodoch  $[2,0]$  a  $[5,0]$  lokálne minimá a v bode  $[4,4]$  lokálne maximum.

Približný graf funkcie  $f$  (bez konvexnosti a konkávnosti):

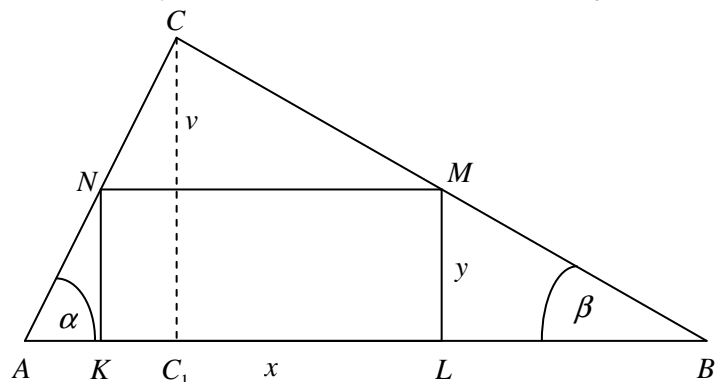


Z grafu môžeme vyčítať, že rovnica  $(x-2)^2 \cdot |x-5| = p$  má práve štyri korene pre  $p \in (0,4)$ .

### 4. príklad (103/11)

Zadanie: Z trojuholníka, ktorého základňa je  $c$ , výška na základňu je  $v$  a uhly pri základni sú ostré, má byť vystrihnutý obdĺžnik, pričom jedna strana obdĺžnika je časťou základne. Určte rozmery obdĺžnika tak, aby mal maximálny obsah.

Riešenie:



Rozmery obdĺžnika:  $|KL| = x$ ,  $|LM| = y$

$$|AB| = c = |AC_1| + |BC_1| = v \cdot \cotg \alpha + v \cdot \cotg \beta = v \cdot (\cotg \alpha + \cotg \beta)$$

$$|AB| = c = |AK| + |KL| + |LB| = y \cdot \cotg \alpha + x + y \cdot \cotg \beta = x + y \cdot (\cotg \alpha + \cotg \beta) = x + y \frac{c}{v} \Rightarrow x = c - y \frac{c}{v}$$

$$S = xy = cy - \frac{c}{v} y^2 \quad y \in (0, v)$$

$$S'(y) = c - 2 \frac{c}{v} y$$

$$S'(y) = 0 \Leftrightarrow y = \frac{v}{2}$$

## MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

### **MATURITNÝ OKRUH 9: FUNKCIE**

$S''(y) = -2\frac{c}{v} < 0 \Rightarrow$  v bode  $y = \frac{v}{2}$  je lokálne (a na danom intervale aj globálne) maximum.

$$\underline{\underline{x = c - \frac{c \cdot v}{v \cdot 2} = \frac{c}{2}}}$$

Rozmery obdĺžnika s najväčším obsahom vystrihnutého z trojuholníka sú  $\frac{c}{2}$  a  $\frac{v}{2}$ .

### **5. príklad (104/18)**

Zadanie: Nájdite body nespojitosti funkcie  $f : y = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 3x + 2}$  a pokúste sa dodefinovať v týchto bodoch funkciu  $f$  tak, aby v nich bola spojitá.

Riešenie:

$$f : y = \frac{(x-2) \cdot (x+1)}{(x-2) \cdot (x-1)}$$

Body nespojitosti funkcie  $f$  : 2 a 1.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{x-1} = 3$$

$2 \notin D(f) \wedge \exists \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \Rightarrow$  2 je odstrániteľný bod nespojitosti funkcie  $f$  a funkčnú hodnotu v bode 2 by sme mohli dodefinovať hodnotou 3.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x-1} = \infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{x-1} = -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \Rightarrow \text{bod 1 nie je odstrániteľným bodom nespojitosti funkcie } f.$$