Autor: Martin Slota

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 15: INTEGRÁLY

1. príklad (168/2 + 168/4)

Zadanie: Vypočítajte

a) $\int \frac{3^x\,dx}{\sqrt{25-9^x}}$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx$

Riešenie:

a) $\int \frac{3^x\,dx}{\sqrt{25-9^x}} = \int \frac{3^x\,dx}{5\cdot\sqrt{1-\frac{9^x}{25}}} \left(u=\frac{3^x}{5} \Rightarrow du=\frac{3^x\cdot\ln 3}{5}dx \Rightarrow \frac{3^x\,dx}{5}=\frac{1}{\ln 3}du \right) = \frac{1}{\ln 3}\cdot\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} =$

$= \underline{\underline{\frac{\arcsin\frac{3^x}{5}}{\ln 3}+c}}$

b) $\int x\sin x\,dx = -x\cos x - \int -\cos x dx = \underline{-x\cos x+\sin x+c}$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx = [\sin x - x\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{2}-\sin 0+0\cdot\cos 0 = 1-0-0+0=\underline{\underline{1}}$

2. príklad (169/8)

Zadanie: Pre ktoré $a\in R^+$ je obsah útvaru ohraničeného krivkami $y=\cos ax, y=0, x=\frac{\pi}{6a}, x=\frac{\pi}{2a}$ väčší ako 3?

Riešenie:

Autor: Martin Slota

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 15: INTEGRÁLY

$$S > 3$$

$$\int_{\frac{\pi}{6a}}^{\frac{\pi}{2a}} \cos ax \, dx > 3$$

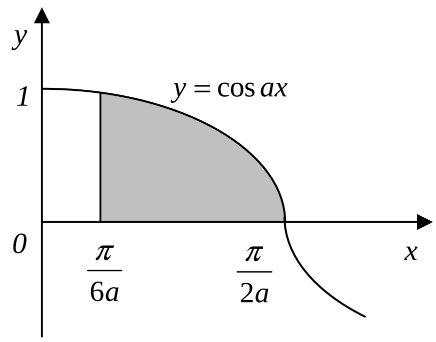
$$\left[\frac{\sin ax}{a}\right]_{\frac{\pi}{6a}}^{\frac{\pi}{2a}} > 3$$

$$\frac{\sin\frac{a\pi}{2a}}{a} - \frac{\sin\frac{a\pi}{6a}}{a} > 3$$

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{2a} > 3 \qquad \left(a \in R^+\right)$$

$$2 - 1 > 6a$$

$$\frac{1}{6} > a$$



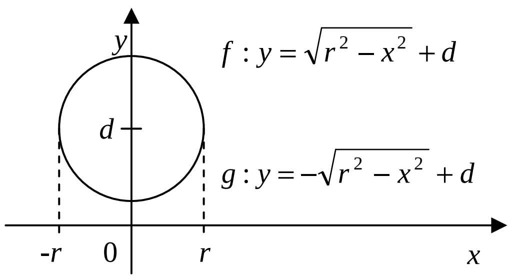
Obsah požadovaného útvaru je väčší ako 3 pre $a \in \left(0, \frac{1}{6}\right)$.

3. príklad (169/10)

Zadanie: Torusom nazývame teleso, ktoré vznikne rotáciou kruhu s polomerom $r > 0$ okolo priamky ležiacej v rovine kruhu, ktorej vzdialenosť od stredu kruhu je $d > r$. Vypočítajte objem torusu.

Riešenie:

Najprv si situáciu načrtneme:



$$V = \pi \cdot \int_{-r}^{r} \left(\left(\sqrt{r^2 - x^2} + d\right)^2 - \left(-\sqrt{r^2 - x^2} + d\right)^2 \right) dx =$$

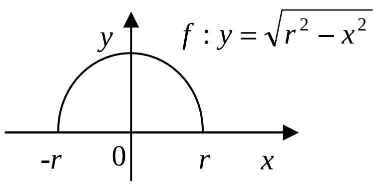
$$= \pi \cdot \int_{-r}^{r} \left(r^2 - x^2 + d^2 + 2d\sqrt{r^2 - x^2} - r^2 + x^2 - d^2 + 2d\sqrt{r^2 - x^2} \right) dx =$$

$$= \pi \cdot \int_{-r}^{r} \left(4d\sqrt{r^2 - x^2}\right) dx = 4d\pi \cdot \underbrace{\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx}_{\text{polovica obsahu kruhu}} = 4d\pi \cdot \frac{\pi r^2}{2} = \underline{\underline{2\pi^2 r^2 d}}$$

4. príklad (169/14)

Zadanie: Odvoďte vzorec pre povrch gule s polomerom r.

Riešenie:



Autor: Martin Slota

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 15: INTEGRÁLY

Guľu dostaneme rotáciou krivky s predpisom $f: y=\sqrt{r^2-x^2}$ okolo osi x, pričom $x \in \langle -r, r \rangle$.

Najprv si vypočítame prvú deriváciu funkcie:

$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{r^2-x^2}}\cdot(-2x)=\frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}} \rightarrow$ nespojitá v bodoch $x=\pm r$, ale dva body tvoria množinu Jordanovej miery nula a neovplyvňujú teda výsledok pri výpočte povrchu.

Podľa vzorca je teda povrch gule:

$$S_G=2\pi\int_{-r}^{r} f(x)\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx=2\pi\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)^2}\,dx=$$

$$=2\pi\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\cdot\sqrt{\frac{r^2-x^2+x^2}{r^2-x^2}}\,dx=2\pi\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\cdot\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx=2\pi\int_{-r}^{r} r\,dx=2\pi[rx]_{-r}^{r}=$$

$$=2\pi\left(r^2-\left(-r^2\right)\right)=\underline{\underline{4\pi r^2}}$$

5. príklad (170/20 a))

Zadanie: Dokážte rovnosť $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg} x\,dx+\int_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx=\frac{\pi}{4}$.

Dôkaz (priamy):

$$\int \operatorname{tg} x dx=-\int\frac{-\sin x}{\cos x}dx=-\ln|\cos x|+c_1$$

$$\int \operatorname{arctg} x dx=x\cdot\operatorname{arctg} x-\int\frac{x}{1+x^2}dx=x\cdot\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\int\frac{2x}{1+x^2}dx=x\cdot\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|+c_2$$

$$\text{ĽS}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg} x\,dx+\int_0^1\operatorname{arctg} x\,dx=\left[-\ln|\cos x|\right]_0^{\frac{\pi}{4}}+\left[x\cdot\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|\right]_0^1=-\ln\left|\cos\frac{\pi}{4}\right|+\ln|\cos 0|+1\cdot\operatorname{arctg}1-$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left|1+1^2\right|-0\cdot\operatorname{arctg}0+\frac{1}{2}\ln\left|1+0^2\right|=-\ln\frac{\sqrt{2}}{2}+0+\frac{\pi}{4}-\ln\sqrt{2}-0+0=\frac{\pi}{4}-\ln\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}-\ln 1=\underline{\frac{\pi}{4}}$$

$$\text{PS}=\underline{\frac{\pi}{4}}$$

$\underline{\underline{\text{ĽS}=\text{PS}}}$ ČBTD

6. príklad (169/11)

Zadanie: Vypočítajte objem telesa, ktoré vznikne rotáciou elementárnej oblasti ohraničenej krivkami $y=x^2$ a $y^2=x$ okolo osi x.

Riešenie:

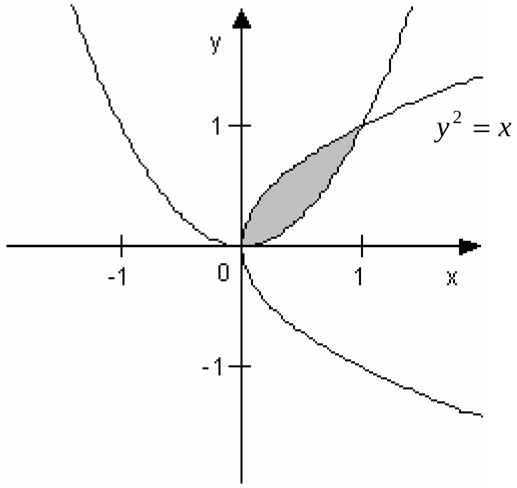
Situáciu si načrtneme:

$y=x^2$

Autor: Martin Slota

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 15: INTEGRÁLY



Objem teda je:

$$V = \pi \cdot \int_0^1 \left(\left(\sqrt{x}\right)^2 - \left(x^2\right)^2 \right) dx = \pi \cdot \int_0^1 \left(x - x^4\right) dx = \pi \cdot \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \pi \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) = \underline{\underline{\frac{3\pi}{10}}}$$