Autor: Martin Slota

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 18: KOMPLEXNÉ ČÍSLA

1. príklad (199/Pr. 3)

Zadanie: Určte, aké zobrazenie dostaneme zložením otočenia okolo stredu $[-2,2]$ o 90° a posunutia o vektor $[1,1]$ v tomto poradí.

Riešenie:

$$\mathrm{R}_{[-2,2],90^\circ} \circ \mathrm{T}_{[1,1]}$$
$$w = [(z+2-2i)\cdot(\cos 90^\circ + i\sin 90^\circ) - 2 + 2i] + 1 + i$$
$$w = zi + 2i - 2i^2 - 2 + 2i + 1 + i$$
$$w = zi + 2i + 2i + 1 + i$$
$$\underline{w = zi + 1 + 5i} \Rightarrow \mathrm{R}_{?,90^\circ}$$
$$w = [z - (a+bi)]\cdot(\cos 90^\circ + i\sin 90^\circ) + a + bi$$
$$w = zi - ai - bi^2 + a + bi$$
$$\underline{w = zi + (a+b) + (b-a)i}$$

Dostávame dve rovnice o dvoch neznámych:

$$a + b = 1$$
$$\underline{b - a = 5}$$
$$a = -2$$
$$b = 3$$
$$\mathrm{R}_{[-2,2],90^\circ} \circ \mathrm{T}_{[1,1]} = \mathrm{R}_{[-2,3],90^\circ}$$

Zložením daných zobrazení v uvedenom poradí získame otočenie o 90° so stredom v bode, ktorý je obrazom komplexného čísla $[-2,3]$.

2. príklad (201/4)

Zadanie: Rozložte na súčin:

a) $x^2 - 2x + 10$

b) $z^2 + z + 1 + i$

Riešenie:

a) $D = 4 - 40 = -36$

$$\sqrt{D} = \pm 6i$$
$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 6i}{2} = 1 \pm 3i$$
$$\underline{\underline{x^2 - 2x + 10 = (x - 1 + 3i)(x - 1 - 3i)}}$$

b) $D = 1 - 4 - 4i = -3 - 4i$

$$\sqrt{D} = \sqrt{-3-4i} = a + bi$$
$$\underline{-3 - 4i = a^2 - b^2 + 2abi}$$
$$-3 = a^2 - b^2$$
$$\underline{-4 = 2ab \Rightarrow ab = -2}$$
$$-3b^2 = (ab)^2 - b^4$$

Autor: Martin Slota

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 18: KOMPLEXNÉ ČÍSLA

$$
\begin{aligned}
-3b^2 &= 4-b^4\\
b^4-3b^2-4 &= 0\\
\left(b^2-4\right)\left(b^2+1\right) &= 0
\end{aligned}
$$

$$b=\pm 2 \Rightarrow a=\mp 1 \Rightarrow \underline{\sqrt{D}=\pm 1\mp 2i}$$

$$z_{1,2}=\frac{-1\pm 1\mp 2i}{2} \Rightarrow z_1=-i$$

$$\Rightarrow z_2=-1+i$$

$$\underline{\underline{z^2+z+1+i=(z+i)(z+1-i)}}$$

3. príklad (201/8,9,10)

Zadanie: Určte v Gaussovej rovine obrazy množín:

a) $M=\{z\in C;\ z\cdot\bar{z}=4\}$

b) $M=\{z\in C;\ |z-1|+|z+1|<4\}$

c) $M=\{z\in C;\ 2\le|z-4+i|\le 3\}$

Riešenie:

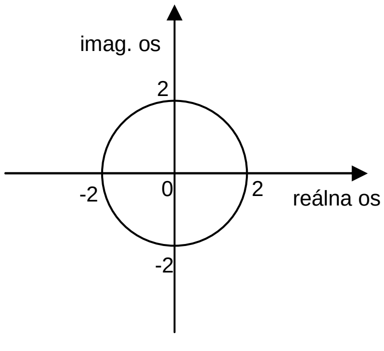
a) $(a+bi)(a-bi)=a^2-b^2i^2=a^2+b^2=4\Rightarrow\sqrt{a^2+b^2}=2\Rightarrow|z|=2$

Množina M sa v Gaussovej rovine zobrazí ako kružnica so stredom v bode, ktorý je obrazom komplexného čísla $[0,0]$ a polomerom 2.

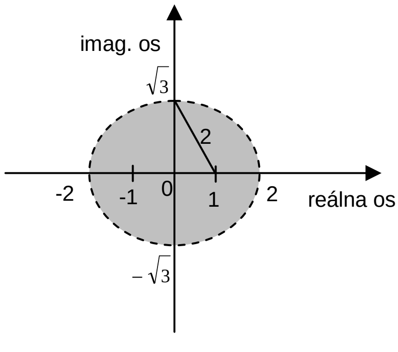
b) Súčet vzdialeností od bodov, ktoré sú obrazmi komplexných čísel $[-1,0],[1,0]$ musí byť $<4\Rightarrow$ body, ktoré sú obrazy komplexných čísel z tvoria vnútro elipsy s ohniskami $[-1,0],[1,0]$ a hlavnou poloosou 2.

c) Množina M sa v Gaussovej rovine zobrazí ako medzikružie sústredných kružníc so stredom v bode, ktorý je obrazom komplexného čísla $[4,-1]$ a polomermi 2 a 3 aj s hraničnými kružnicami.

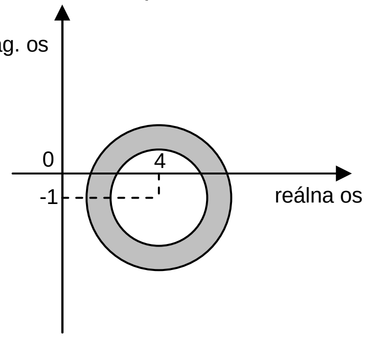
obr. k úlohe a):



obr. k úlohe b):



obr. k úlohe c):



4. príklad (202/17)

Zadanie: Riešte v C rovnicu $(z-3)^2+(\bar{z}+i)^2=4$.

Riešenie:

Autor: Martin Slota

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 18: KOMPLEXNÉ ČÍSLA

$$\begin{aligned}
(a+bi-3)^2+(a-bi+i)^2 &= 4\\
(a-3)^2+b^2i^2+2(a-3)bi+a^2+(1-b)^2i^2+2a(1-b)i &= 4\\
a^2-6a+9-b^2+2abi-6bi+a^2-1+2b-b^2+2ai-2abi &= 4\\
\underline{\left(2a^2-6a-2b^2+8+2b\right)+(2a-6b)i} &= \underline{4+0\cdot i}\\
2a^2-6a-2b^2+8+2b &= 4\\
\underline{2a-6b} &= \underline{0 \Rightarrow a=3b}\\
18b^2-18b-2b^2+8+2b &= 4\\
16b^2-16b+4 &= 0\\
4(2b-1)^2 &= 0
\end{aligned}$$

$$b=\frac{1}{2} \Rightarrow a=\frac{3}{2} \Rightarrow \underline{\underline{K=\left\{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i\right\}}}$$

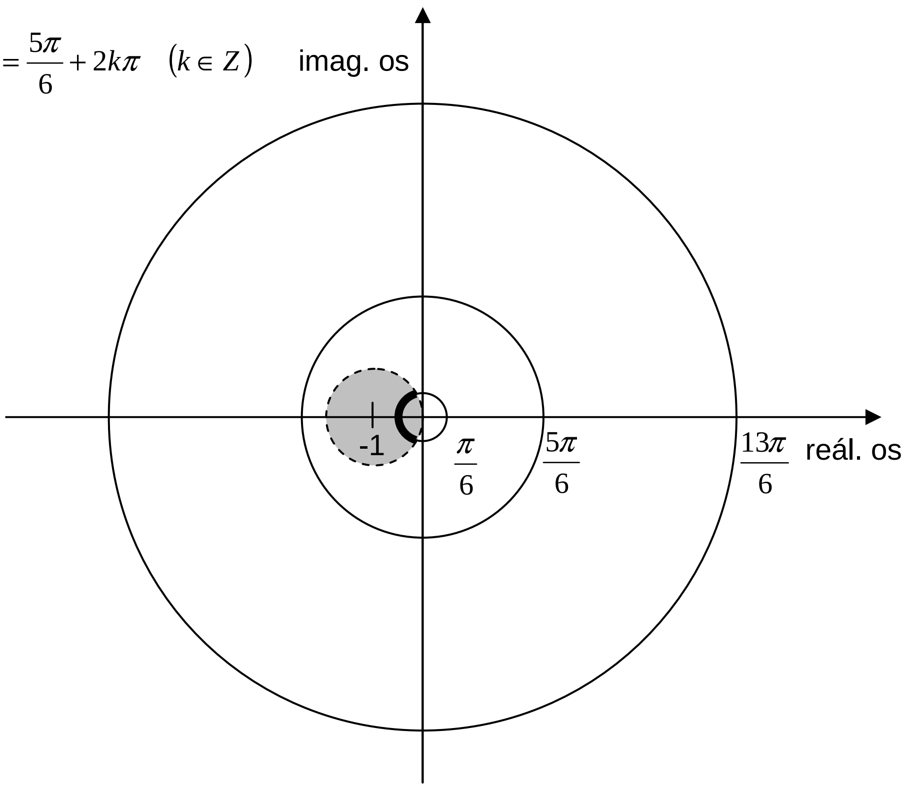
5. príklad (198/2)

Zadanie: V Gaussovej rovine určte obrazy všetkých komplexných čísel z, pre ktoré platí $\sin|z|=\frac{1}{2}$ a súčasne $\left|\frac{z}{|z|}+|z|\right|<1$.

Riešenie:

$$\sin|z|=\frac{1}{2} \Rightarrow |z|=\frac{\pi}{6}+2k\pi \vee |z|=\frac{5\pi}{6}+2k\pi \quad (k\in Z)$$

$$\begin{aligned}
\left|\frac{z}{|z|}+|z|\right| &< 1\\
\left|\frac{z+|z|^2}{|z|}\right| &< 1\\
\left|\frac{z+z\cdot\bar{z}}{|z|}\right| &< 1\\
\left|\frac{z\cdot(1+\bar{z})}{|z|}\right| &< 1\\
\left|\frac{z\cdot\overline{(1+z)}}{|z|}\right| &< 1\\
\frac{|z|\cdot\left|\overline{1+z}\right|}{|z|} &< 1\\
\left|\overline{1+z}\right| &< 1\\
|1+z| &< 1
\end{aligned}$$



Autor: Martin Slota

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 18: KOMPLEXNÉ ČÍSLA

Prvú podmienku spĺňajú všetky komplexné čísla, ktorých obrazy v Gaussovej rovine patria niektorej zo sústredných kružníc so stredom v bode, ktorý je obrazom komplexného čísla $[0,0]$ a polomermi $\frac{\pi}{6}+2k\pi$ alebo $\frac{5\pi}{6}+2k\pi \quad (k \in Z)$.

Druhú podmienku spĺňajú všetky komplexné čísla, ktorých obrazy v Gaussovej rovine patria vnútru kruhu so stredom v bode, ktorý je obrazom komplexného čísla $[-1,0]$ a polomerom 1.

Výsledná množina komplexných čísel splňujúcich obidve podmienky je prienikom množiny komplexných čísel spĺňajúcich prvú podmienku a množiny komplexných čísel spĺňajúcich druhú podmienku. *Je to teda otvorený kružnicový oblúk* AB *(bez krajných bodov) na kružnici so stredom v bode, ktorý je obrazom komplexného čísla* $[0,0]$ *a polomerom* $\frac{\pi}{6}$*, ktorý leží v kruhu so stredom v bode, ktorý je obrazom komplexného čísla* $[-1,0]$ *a polomerom* 1. Na obrázku je hľadaný kružnicový oblúk zobrazený hrubou čiarou.