

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 25: KRUŽNICA

1. príklad (266/Pr. 1)

Zadanie: Nech ABC je pravouhlý trojuholník s pravým uhlom pri vrchole C . Zostrojme nad jeho preponou AB štvorec, jeho stred označme S . Dokážte, že \overline{CS} je os pravého uhla a určte dĺžku $|CS|$.

Dôkaz (priamy):

Nech k je Tálesova kružnica nad priemerom AB . Na tejto kružnici ležia body C, S . Uhol BCS je obvodový uhol prislúchajúci oblúku BS . Uhol ACS je obvodový uhol prislúchajúci oblúku AS . Keďže S je stred štvorca, platí $|BS| = |AS|$, a teda aj dĺžka oblúkov BS a AS bude rovnaká. Teda aj príslušné obvodové uhly sa rovnajú. Tým je dokázané, že priamka \overline{CS} je osou uhla pri vrchole C . Keďže štvoruholník $ASBC$ je tetivový (všetky štyri vrcholy ležia na Tálesovej kružnici k , platí v ňom Ptolemaiova veta (pozri pozn.): $|SC| \cdot |AB| = |AC| \cdot |BS| + |BC| \cdot |AS|$). Označme $|AC| = b, |BC| = a$. Potom teda z Pytagorových viet v trojuholníku

a) ABC musí platiť $|AB| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

b) ABS musí platiť $|AS| = |BS| = \sqrt{\frac{|AB|^2}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}$.

Po dosadení dostávame:

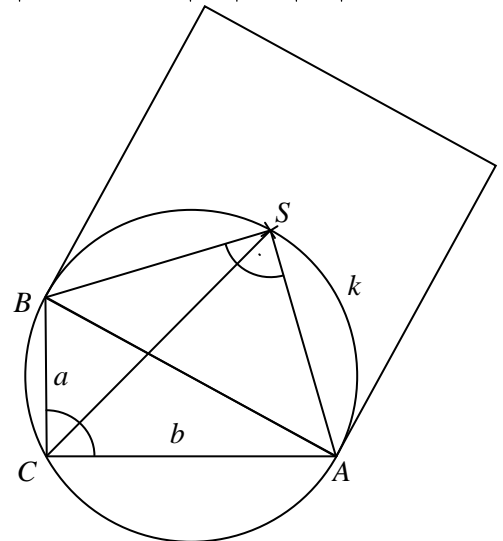
$$|SC| = \frac{b \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2} + a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\sqrt{2} \cdot (a + b)}{2}$$

pozn. (poznatky o tetivových štvoruholníkoch):

1. Štvoruholník sa nazýva tetivový, ak mu možno opísať kružnicu (ktorá prechádza všetkými štyrmi jeho vrcholmi).
2. Štvoruholník $ABCD$ je tetivový práve vtedy, keď pre jeho vnútorné uhly platí $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ$
3. Ptolemaiova veta: V ľubovoľnom štvoruholníku $ABCD$ platí, že súčin veľkostí uhlopriečok je menší, alebo sa rovná súčtu súčinov veľkostí protíahlych strán:

$$|AC| \cdot |BD| \leq |AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |BC|$$

Rovnosť nastáva práve vtedy, keď je štvoruholník tetivový.

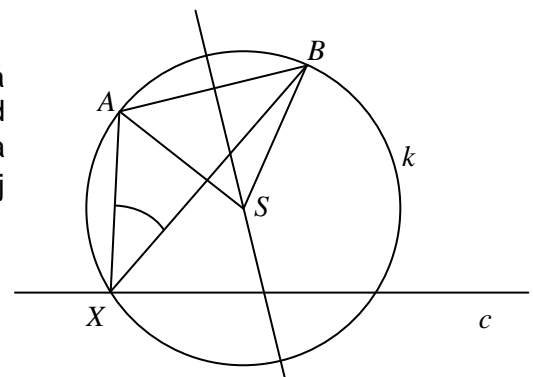


2. príklad (267/2)

Zadanie: Pri ceste je umiestnený pútač AB nerovnobezne s cestou, pričom z každého miesta na ceste ho je vidieť pod ostrým zorným uhlom. Z ktorého miesta cesty ho máme fotografovať, aby bol záber urobený pod najväčším možným zorným uhlom?

Riešenie:

Nech X je bod na ceste. Potom zorný uhol AXB sa rovná polovici príslušného stredového uhla ASB , kde S je stred kružnice opísanej bodom A, B, X . Veľkosť tohto uhla vzrastá, keď sa bod S približuje po osi úsečky AB k jej



MATURITNÝ OKRUH 25: KRUŽNICA

stredom. Kružnica k so stredom S a polomerom $r = |SA|$ však musí mať s priamkou c (cesta) aspoň jeden spoločný bod. Je zrejmé, že maximálne prípustné priblíženie bodu S k úsečke AB nastane vtedy, keď sa kružnica k dotýka priamky c . Vtedy bude uhol ASB , a teda aj uhol AXB , maximálny.

Úloha sa teda zredukovala na nájdenie kružnice prechádzajúcej danými bodmi A, B a dotýkajúcej sa danej priamky c . Túto úlohu budeme riešiť pomocou mocnosti bodu ku kružnici (pozri pozn.). Označme P priesečník priamok AB a c . Pre hľadaný bod dotyku X priamky a kružnice potom musí platiť $|PX|^2 = |PA| \cdot |PB|$, čiže $|PX| = \sqrt{|PA| \cdot |PB|}$. Túto dĺžku vieme skonštruovať napríklad pomocou Euklidovej vety o výške. Keď teda od bodu P nanesieme (na správnu polpriamku) na priamke c dĺžku $\sqrt{|PA| \cdot |PB|}$, dostaneme hľadaný bod X , z ktorého je vidieť úsečku AB (pútač) pod najväčším zorným uhlom.

pozn. – veta o mocnosti bodu ku kružnici:

Nech $k(S, r)$ je kružnica v rovine a M bod neležiaci na tejto kružnici. Nech p, q sú dve sečnice kružnice k prechádzajúce bodom M a pretínajúce kružnicu k v bodoch P_1, P_2, Q_1, Q_2 ($p \cap k = \{P_1, P_2\}, q \cap k = \{Q_1, Q_2\}$). Potom platí: $|P_1M| \cdot |P_2M| = |Q_1M| \cdot |Q_2M| = |SM|^2 - r^2$

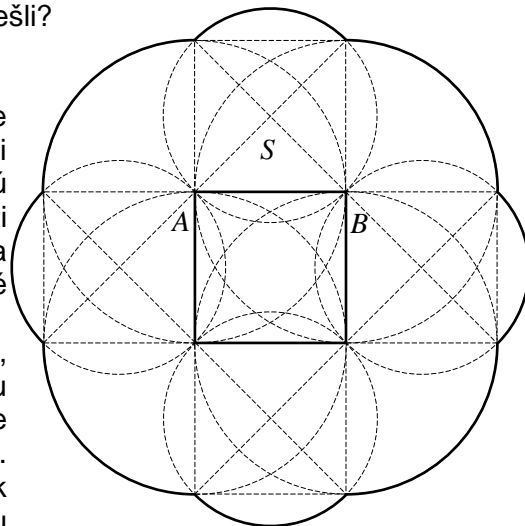
3. príklad (270/4)

Zadanie: Obišli sme raz dookola budovu so štvorcovým pôdorysom $20m \times 20m$ tak, že sme ju po celý čas videli pod zorným uhlom 45° . Akú dráhu sme pritom prešli?

Riešenie:

Aby sme mohli vypočítať dĺžku prejdenej dráhy, musíme najprv zistiť, akú dráhu sme vlastne prešli. Budovu si môžeme predstaviť ako štvorec v rovine. Dráhu, ktorú prejdeme, môžeme rozdeliť na dve časti – v jednej budú všetky také body, z ktorých vidíme práve dva (susedné) vrcholy štvorca a v druhej budú všetky také body, z ktorých vidíme práve tri vrcholy štvorca.

Najskôr uvažujme iba tú prvú časť dráhy. Tvoria ju body, z ktorých je vidieť iba jednu stranu štvorca (čiže jednu stenu budovy). Zvolíme si teda jednu stranu štvorca (pre ostatné bude riešenie obdobné) a označíme si ju AB . Zostrojíme nad ňou Tálesovu kružnicu, nájdeme jej prienik s osou úsečky AB , označíme ho S (bod „pod“ úsečkou



AB nás nezaujímá) a narýsujeme kružnicu k so stredom v bode S a polomerom $|SA|$. Teraz platí, že stredový uhol prislúchajúci oblúku AB je 90° (Tálesova kružnica), a teda obvodový uhol prislúchajúci tomuto oblúku bude 45° (polovica stre dového uhla). Dráha v tejto časti roviny bude teda kružnicový oblúk kružnice k nachádzajúci sa „nad“ úsečkou AB . Rovnako môžeme zostrojiť dráhu „nad“ ostatnými úsečkami reprezentujúcimi stenu budovy.

Teraz k 2. časti dráhy. Z miest, z ktorých vidíme tri vrcholy štvorca, môžeme považovať za smerodajné pre náš zorný uhol iba vrcholy, ktorých spojením dostaneme uhlopriečku štvorca. Pre každú uhlopriečku vieme zostrojiť dve kružnice so stredmi v ostatných bodoch štvorca a polomerom $20m$ (strana štvorca). Oblúky týchto kružníc nám dotvoria dráhu, po ktorej sme prešli.

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 25: KRUŽNICA

Dĺžka zostrojenej dráhy bude teda: $l = 2\pi \cdot \frac{20}{\sqrt{2}} + 2\pi \cdot 20 = \underline{\underline{20\pi \cdot (\sqrt{2} + 2)m}}$.

4. príklad (270/5)

Zadanie: Vyjadrite v pravouhlom trojuholníku veľkosť polomeru vpísanej kružnice pomocou dĺžok strán.

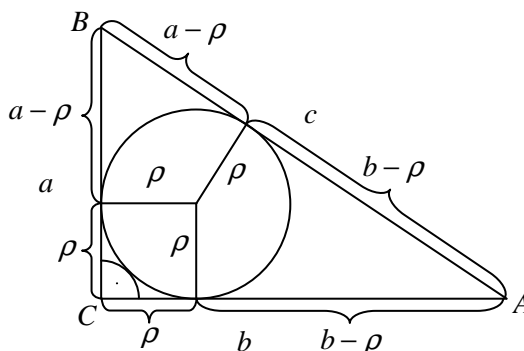
Riešenie:

Polomer vpísanej kružnice si označíme ρ , trojuholník nech je ABC s pravým uhlom pri vrchole C a stranami a, b, c . Situáciu si načrtne (pozri obr.), pričom využívame poznatok, že vzdialenosť daného bodu a dotykových bodov dotyčníc k danej kružnici z tohto bodu je rovnaká. Z obrázku je teda zrejmé, že:

$$c = (a - \rho) + (b - \rho)$$

$$2\rho = a + b - c$$

$$\rho = \frac{a + b - c}{2}$$

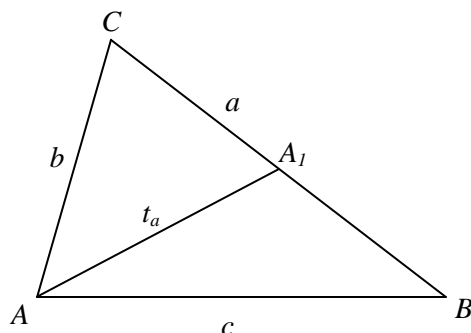


5. príklad (271/15)

Zadanie: Zostrojte trojuholník ABC , ak sú dané veľkosti strán b, c a rovnosť $2t_a = 3a$.

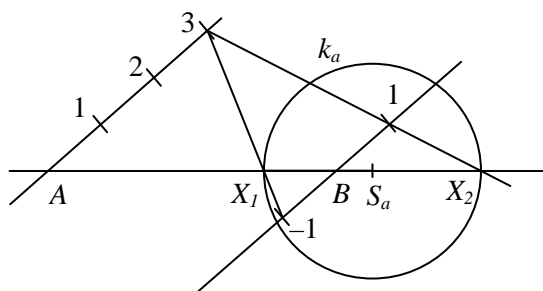
Riešenie:

Náčrt:



Rozbor:

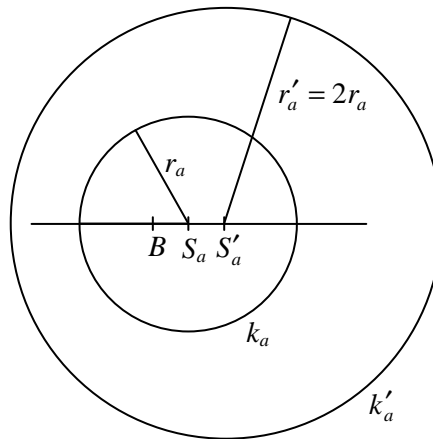
- $2t_a = 3a \Rightarrow t_a = \frac{3}{2}a \Rightarrow |AA_1| = \frac{3}{2}|BC| = 3|A_1B| \Rightarrow A_1 \in \{X; |AX| = 3 \cdot |BX|\}$, čiže bod A_1 leží na Apolóniovej kružnici k_a . Konštrukcia Apolóniovej kružnice ($k = 3$):



MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 25: KRUŽNICA

2. $H_{B,2} : A_1 \rightarrow C$
 $H_{B,2} : k_a \rightarrow k'_a$



$$|BS'_a| = 2 \cdot |BS_a|$$

3. $l; l(A, b)$
 $C \in l \cap k'_a$