Autor: Martin Slota

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 13: LIMITY

1. príklad (139/Pr. 1)

Zadanie: Vypočítajte limity a) $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$, b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n+5^n}$.

Riešenie:

a) $$\lim_{n\to\infty} n\cdot\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\cdot\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)}{\sqrt{n^2+1}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot\left(n^2+1-n^2\right)}{\sqrt{n^2+1}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}+n}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1}=\underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

b) $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n+5^n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{5^n\left(\frac{3^n}{5^n}+1\right)}=5\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3}{5}\right)^n+1}$$

Teraz si treba uvedomiť, že $\forall n\in N; 0<\left(\frac{3}{5}\right)^n\le\frac{3}{5}\Rightarrow 1<\left(\frac{3}{5}\right)^n+1\le\frac{3}{5}+1\Rightarrow 1<\sqrt[n]{\left(\frac{3}{5}\right)^n+1}\le\sqrt[n]{\frac{3}{5}+1}$

a teda aj $\lim\limits_{n\to\infty}1=1<\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3}{5}\right)^n+1}\le\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3}{5}+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{8}{5}}=1$.

S využitím nižšie uvedenej vety o limitách dostávame výsledok

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n+5^n}=5\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3}{5}\right)^n+1}=5\cdot 1=\underline{\underline{5}}$$

Použitá veta:

Nech f,g,h sú funkcie definované v rýdzom okolí bodu a také, že $f(x)\le g(x)\le h(x)$ pre $\forall x\in O(a)$. Ak $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}h(x)\Rightarrow\exists\lim\limits_{x\to a}g(x)$ a platí $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=\lim\limits_{x\to a}h(x)$.

2. príklad (139/Pr. 2b)

Zadanie: Vypočítajte súčet radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$.

Riešenie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\ldots=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n}+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{2^n}+\ldots+\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{2^n}+\ldots$$

Keďže $\sum\limits_{n=k}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^{k-1}}$, tak $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots\frac{1}{2^{k-1}}+\ldots=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1+1=\underline{\underline{2}}$

Použitá veta:

Nech $k\in N$. Potom $\sum\limits_{n=k}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^{k-1}}$.

Dk. (priamy):

Autor: Martin Slota

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 13: LIMITY

$\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ je súčet nekonečného geometrického radu s prvým členom $\frac{1}{2^k}$ a kvocientom $\frac{1}{2}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{\frac{1}{2^k}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2^{k-1}}$$ ČBTD.

3. príklad (141/5)

Zadanie: Vypočítajte $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+a+a^2+\ldots+a^n}{1+a^2+a^4+\ldots+a^{2n}}$, ak $|a|<1$.

Riešenie:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+a+a^2+\ldots+a^n}{1+a^2+a^4+\ldots+a^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot\frac{a^{n+1}-1}{a-1}}{1\cdot\frac{\left(a^2\right)^{n+1}-1}{a^2-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(a^2-1\right)\cdot\left(a^{n+1}-1\right)}{(a-1)\cdot\left(\left(a^{n+1}\right)^2-1\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{(a+1)\cdot\left(a^{n+1}-1\right)}{\left(a^{n+1}-1\right)\cdot\left(a^{n+1}+1\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a+1}{a^{n+1}+1}=\frac{a+1}{0+1}=\underline{\underline{a+1}}$$

4. príklad (143/22a)

Zadanie: Vypočítajte limitu $\lim\limits_{x\to-2}\frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$.

Riešenie (využijeme L'Hospitalovo pravidlo):

$$\lim_{x\to-2}\frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}=\lim_{x\to-2}\frac{\frac{1}{3}\cdot(x-6)^{-\frac{2}{3}}}{3x^2}=\lim_{x\to-2}\frac{1}{9x^2\cdot(x-6)^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{9\cdot4\cdot(-8)^{\frac{2}{3}}}=\underline{\underline{\frac{1}{144}}}$$

5. príklad (143/19)

Zadanie: Vyriešte v R rovnicu $\sum_{n=1}^{\infty}2^{nx}=1$.

Riešenie:

Keďže $\sum_{n=1}^{\infty}2^{nx}=2^x+2^{2x}+2^{3x}+\ldots$ je nekonečný geometrický rad s prvým členom $a_1=2^x$ a kvocientom $q=2^x$, môžeme jeho súčet s vypočítať podľa vzorca $s=\frac{a_1}{1-q}$ (za podmienky, že $|q|<1\Rightarrow\left|2^x\right|<1\Rightarrow 2^x<2^0\Rightarrow\underline{x<0}$). Rovnica teda prechádza do tvaru:

Autor: Martin Slota

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 13: LIMITY

$$\frac{2^x}{1-2^x}=1$$

$$2^x=1-2^x$$

$$2\cdot 2^x=1$$

$$2^{x+1}=2^0$$

$$x+1=0$$

$$x=-1$$

Keďže vypočítaná hodnota spĺňa podmienku, tak množina koreňov rovnice je $\underline{\underline{K=\{-1\}}}$.