

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

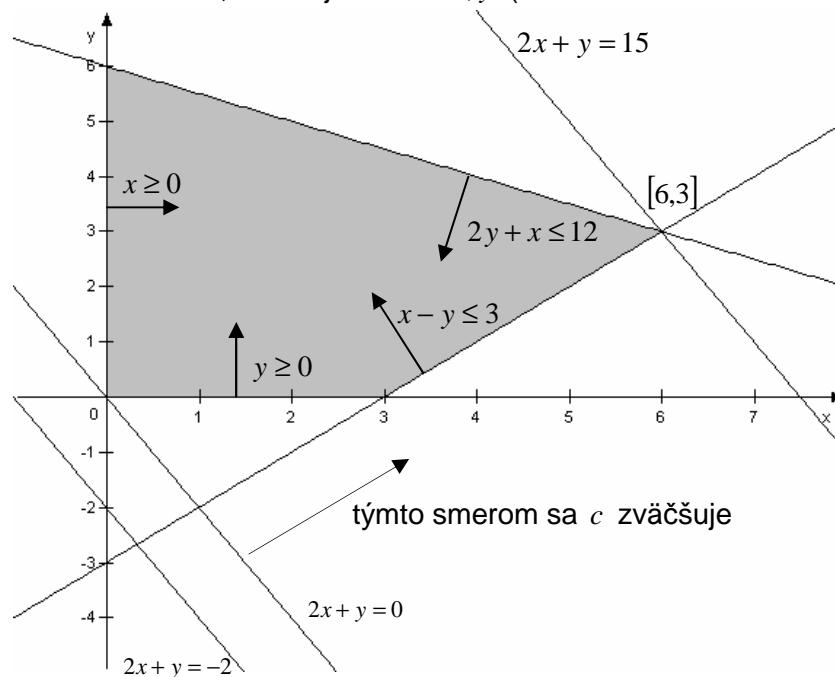
MATURITNÝ OKRUH 5: LINEÁRNE ROVNICE A NEROVNICE

1. príklad (57/Pr. 3)

Zadanie: Nájdite reálne čísla x, y , pre ktoré platí $x \geq 0, y \geq 0, 2y + x \leq 12, x - y \leq 3$ a zároveň cieľová funkcia $c(x, y) = 2x + y$ nadobúda maximálnu hodnotu.

Riešenie:

Najprv si zistíme množinu bodov, z ktorej sú čísla x, y (zafarbená šedou farbou na obrázku):



Spomedzi priamok $2x + y = c$ hľadáme teraz tú, ktorá má maximálne c , a pritom neprázdny prienik so zakreslenou množinou bodov. Je ňou priamka $2x + y = 15$, ktorá sa dotýka zakreslenej oblasti v bode $[6,3]$. Hľadaným optimálnym riešením je teda $x = 6, y = 3, c(x, y) = 15$.

2. príklad (58/4)

Zadanie: Vyriešte sústavu s reálnymi parametrami a, b, c :

$$3x - y - 2z = a$$

$$-2x + 3y - z = b$$

$$-x - 2y + 3z = c$$

Riešenie:

Rovnicu budeme riešiť Gaussovou eliminačnou metódou:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -2 & a \\ -2 & 3 & -1 & b \\ -1 & -2 & 3 & c \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \cdot(-2) \quad \cdot 3 \quad \cdot(-1) \end{array}$$

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 5: LINEÁRNE ROVNICE A NEROVNICE

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -7 & 7 & a+3c \\ 0 & 7 & -7 & b-2c \\ 1 & 2 & -3 & -c \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ /:7 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & a+b+c \\ 0 & 1 & -1 & \frac{b-2c}{7} \\ 1 & 2 & -3 & -c \end{array} \right) \begin{array}{l} / \cdot (-2) \\ \leftarrow \end{array}$$

$a+b+c \neq 0 \Rightarrow K = \emptyset$

Ak $a+b+c = 0$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{b-2c}{7} \\ 1 & 0 & -1 & \frac{-2b-3c}{7} \end{array} \right)$$

Záver:

a, b, c	K
$a+b+c \neq 0$	$K = \emptyset$
$a+b+c = 0$	$\left\{ \left[\frac{-2b-3c}{7} + z, \frac{b-2c}{7} + z, z \right]; z \in \mathbb{R} \right\}$

3. príklad (59/7)

Zadanie: Gazda kúpil na trhu svine, kozy a ovce. Spolu 100 hláv za 100 dukátov. Prasa stojí $3\frac{1}{2}$ dukáta, koza $1\frac{1}{3}$ a ovca $\frac{1}{2}$ dukáta. Koľko zvierat jednotlivých druhov kúpil?

Riešenie:

Počet sviň označíme s , počet kôz k a počet oviec o . Zo zadania vyplýva, že:

$$s + k + o = 100$$

$$\frac{7}{2}s + \frac{4}{3}k + \frac{1}{2}o = 100$$

Máme teda dve rovnice o troch neznámych, pričom neznáme $s, k, o \in \mathbb{N}$. V druhej rovnici teraz odstránime zlomky: $21s + 8k + 3o = 600$

Teraz pričítame (-3) -násobok prvej rovnice k druhej rovnici a zbavíme sa tak neznámej o :
 $18s + 5k = 300$

$(5 | 5k \wedge 5 | 300) \Rightarrow 5 | 18s \Rightarrow 5 | s$. Vypíšeme teda výsledky do tabuľky:

Riešenie č.	s	$k = \frac{300-18s}{5}$	$o = 100 - s - k$
1	5	42	53
2	10	24	66
3	15	6	79

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 5: LINEÁRNE ROVNICE A NEROVNICE

4. príklad (59/10)

Zadanie: Nájdite všetky hodnoty parametra $c \in R$, pre ktoré sústava
$$\begin{cases} -4x + cy = 1 + c \\ (6+c)x + 2y = 3 + c \end{cases}$$
 nemá riešenie.

Riešenie:

Sústava nemá riešenie, pokiaľ $\exists k \in R - \{0\}; (-4k = 6 + c) \wedge (kc = 2) \wedge (k \cdot (1 + c) \neq 3 + c)$

Z prvej rovnice si vyjadríme k a dosadíme do druhej:

$$\frac{6+c}{-4} \cdot c = 2$$

$$c^2 + 6c + 8 = 0$$

$$(c+2) \cdot (c+4) = 0$$

Teraz ešte musíme overiť, či platí aj tretia podmienka:

$$c = -2 \Rightarrow k = -1 \Rightarrow k \cdot (1 + c) = 1 = 3 + c \Rightarrow \text{sústava má riešenie.}$$

$$c = -4 \Rightarrow k = -\frac{1}{2} \Rightarrow k \cdot (1 + c) = \frac{3}{2} \neq -1 = 3 + c \Rightarrow \text{sústava nemá riešenie.}$$

Sústava teda nemá riešenie len pre $c = -4$.

5. príklad (60/17)

Zadanie: Zistite, pre ktoré celé čísla b má sústava rovníc

$$x_1 + bx_2 = 3b^3$$

$$2bx_1 + x_2 + 2bx_3 = 2b^3$$

$$bx_2 + x_3 = b^3$$

riešenie v obore celých čísel a pre každé také b vypíšte všetky tieto riešenia.

Riešenie:

Keď všetky tri rovnice sčítame, dostaneme rovnicu $(2b+1) \cdot (x_1 + x_2 + x_3) = 6b^3$. Úpravou dostávame

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{6b^3}{2b+1}. \text{ Keďže obe strany rovnice sú celé čísla, musí platiť:}$$

$$(2b+1) | 6 \Rightarrow ((2b+1) \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}) \wedge (b \in Z \Rightarrow (2b+1) \text{ je nepárne}) \Rightarrow (2b+1) \in \{\pm 1, \pm 3\}$$

$$2b+1=1 \Rightarrow b=0 \Rightarrow \underline{x_1 = x_2 = x_3 = 0}$$

$$2b+1=-1 \Rightarrow b=-1 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 - x_2 = -3 \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 = -2 \\ -x_2 + x_3 = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow -2x_2 + 6 + x_2 - 2x_2 + 2 = -2 \Rightarrow 3x_2 = 10 \Rightarrow \underline{x_2 \notin Z}$$

$$2b+1=3 \Rightarrow b=1 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_2 + x_3 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow -2x_2 + 6 + x_2 - 2x_2 + 2 = 2 \Rightarrow 3x_2 = 6 \Rightarrow \underline{x_2 = 2 \Rightarrow x_1 = 1, x_3 = -1}$$

$$2b+1=-3 \Rightarrow b=-2 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 = -24 \\ -4x_1 + x_2 - 4x_3 = -16 \\ -2x_2 + x_3 = -8 \end{array} \right\} \Rightarrow -8x_2 + 96 + x_2 - 8x_2 + 32 = -16 \Rightarrow 15x_2 = 144 \Rightarrow \underline{x_2 \notin Z}$$

Pre $b = 0$ má sústava riešenie $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Pre $b = 1$ má sústava riešenie $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -1$.