Autor: Martin Slota

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 3: METÓDY DÔKAZOV V MATEMATIKE

1. príklad (31/Pr. 1)

Zadanie: Dokážte, že číslo $\sqrt{7}$ je iracionálne.

Dôkaz (sporom):

$\sqrt{7} \in Q \Rightarrow \sqrt{7} = \frac{p}{q}\,(p, q \in N; D(p,q) = 1) \Rightarrow \frac{p^2}{q^2} = 7 \Rightarrow p^2 = q^2 \cdot 7 \Rightarrow 7 \mid p^2 \Rightarrow 7 \mid p \Rightarrow \exists k (k \in N); p = 7k \Rightarrow$

$\Rightarrow 7q^2 = 49k \Rightarrow q^2 = 7k \Rightarrow 7 \mid q \Rightarrow$ spor s tým, že $D(p,q) = 1$ $\Rightarrow$ neplatí negácia tvrdenia $\Rightarrow$ platí pôvodné tvrdenie ČBTD.

Dôkaz pomocného tvrdenia:

TD: $\forall n \in N; 7 \mid n^2 \Rightarrow 7 \mid n$

Dôkaz (nepriamy):

obmena: $\forall n \in N; 7 \nmid n \Rightarrow 7 \nmid n^2$

$$\forall n \in N; 7 \nmid n \Rightarrow \exists k \in N; n = \left.\begin{cases} 7k+1 \Rightarrow n^2 = 49k^2 + 14k + 1 \\ 7k+2 \Rightarrow n^2 = 49k^2 + 28k + 4 \\ \vdots \\ 7k+6 \Rightarrow n^2 = 49k^2 + 84k + 36 \end{cases}\right\} \Rightarrow 7 \nmid n^2 \Rightarrow \text{ platí obmenený výrok } \Rightarrow$$

platí aj pôvodný výrok ČBTD.

2. príklad (32/2)

Zadanie: Dokážte, že ak $\sqrt{a} + \sqrt{b} \in Q$ pre nejaké $a, b \in Q$, tak aj $\sqrt{a} \in Q$ aj $\sqrt{b} \in Q$.

Dôkaz (priamy):

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \in Q \Rightarrow \sqrt{a} + \sqrt{b} = \frac{p}{q}\,(p, q \in \mathrm{N};\, p,q \text{ sú neúsdeliteľné}) \Rightarrow \sqrt{a} = \frac{p}{q} - \sqrt{b} \Rightarrow a = \frac{p^2}{q^2} - 2\frac{p}{q}\sqrt{b} + b \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow 2\frac{p}{q}\sqrt{b} = \frac{p^2}{q^2} + b - a \Rightarrow \sqrt{b} = \frac{\frac{p^2}{q^2} + b - a}{2\frac{p}{q}} \Rightarrow \underline{\underline{\sqrt{b} \in Q}} \\ &\left(\sqrt{a} + \sqrt{b} \in Q \wedge \sqrt{b} \in Q\right) \Rightarrow \underline{\underline{\sqrt{a} \in Q}} \end{aligned}\right\} \text{ČBTD}$$

3. príklad (35/2)

Zadanie: Dokážte priamo: $\forall a, b \in (1, \infty); \log_a b + \log_b a \geq 2$.

Dôkaz (priamy):

$$\forall a, b \in (1, \infty); \log_a b + \log_b a = \log_a b + \frac{\log_a a}{\log_a b} = \log_a b + \frac{1}{\log_a b} = x + \frac{1}{x}\,(x = \log_a b) \geq 2 \text{ ČBTD.}$$

Pomocné tvrdenie:

$\forall x \in R^+; x + \frac{1}{x} \geq 2$ (keďže $a, b > 1$, z grafu logaritmickej funkcie vieme, že $\log_a b \in R^+$)

Dôkaz (priamy):

Autor: Martin Slota

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 3: METÓDY DÔKAZOV V MATEMATIKE

$$\forall x \in R^+; x + \frac{1}{x} \geq 2 \Leftrightarrow x^2 + 2x\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \geq 4 \Leftrightarrow x^2 - 2 + \frac{1}{x^2} \geq 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 \geq 0$$, čo je zrejmé.

4. príklad (36/20)

Zadanie: Matematickou indukciou dokážte, že pre každé prirodzené číslo n je $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ deliteľné číslom 133.

Dôkaz (MI):

1. $n = 1; 133 \mid 11^2 + 12^1 \Leftrightarrow 133 \mid 133$ – platí.
2. $\mathrm{TD}: \forall n \in N; 133 \mid \left(11^{n+1} + 12^{2n-1}\right) \Rightarrow 133 \mid \left(11^{n+2} + 12^{2(n+1)-1}\right)$

   $\forall n \in N; 133 \mid \left(11^{n+1} + 12^{2n-1}\right) \Rightarrow 11^{n+1+1} + 12^{2n+1} = 11 \cdot 11^{n+1} + 12^2 \cdot 12^{2n-1} = 11 \cdot \left(11^{n+1} + 12^{2n-1}\right) + 133 \cdot 12^{2n-1} \Rightarrow$

   $\Rightarrow 133 \mid 11 \cdot \left(11^{n+1} + 12^{2n-1}\right) \wedge 133 \mid 133 \cdot 12^{2n-1} \Rightarrow 133 \mid \left(11^{n+2} + 12^{2(n+1)-1}\right)$ ČBTD

5. príklad (35/12)

Zadanie: Dokážte priamo, že ak čísla $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ tvoria aritmetickú postupnosť, tak aj čísla a^2, b^2, c^2 tvoria aritmetickú postupnosť $(a, b, c \in R; a \neq -b; a \neq -c; b \neq -c)$.

Dôkaz (priamy):

$$\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b} \text{ tvoria AP} \Rightarrow \left(\exists d \in R; \frac{1}{c+a} = \frac{1}{b+c} + d \wedge \frac{1}{a+b} = \frac{1}{c+a} + d\right) \Rightarrow \frac{1}{c+a} - \frac{1}{b+c} =$$

$$\left.\begin{array}{r} = \frac{1}{a+b} - \frac{1}{c+a} \Rightarrow \frac{b+c-c-a}{(c+a)(b+c)} = \frac{a+c-a-b}{(a+b)(c+a)} \Rightarrow (b-a)(b+a) = (c-b)(c+b) \Rightarrow b^2 - a^2 = c^2 - b^2 \\ \text{Nech } b^2 - a^2 = d' \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^2 - b^2 = d' \Rightarrow a^2, b^2, c^2 \text{ sú členy AP s diferenciou } d' \text{ ČBTD.}$$