Zdroj: http://www.zones.sk

Autor: Martin Slota

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 24: MNOHOUHOLNÍKY

1. príklad (257/Pr. 2)

Zadanie: Dokážte, že uhlopriečky štvoruholníka so stranami a,b,c,d sú na seba kolmé práve vtedy, keď platí $a^2+c^2=b^2+d^2$.

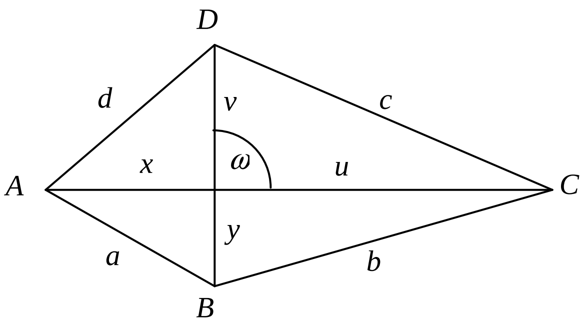
Dôkaz (priamy):

Zvoľme označenie podľa obrázka. Z kosínusovej vety a využitím $\cos(\pi-\omega)=-\cos\omega$ dostaneme vzťahy:

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= x^2+y^2-2xy\cos\omega \\ b^2 &= y^2+u^2+2yu\cos\omega \\ c^2 &= u^2+v^2-2uv\cos\omega \\ d^2 &= x^2+v^2+2xv\cos\omega \end{aligned}\right\} \Rightarrow a^2+c^2=b^2+d^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+u^2+v^2-2\cdot(xy+uv)\cos\omega = x^2+y^2+u^2+v^2+2\cdot(yu+xv)\cos\omega \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\cdot(xu+uv+yu+xv)\cos\omega=0 \Leftrightarrow \cos\omega\cdot(x+u)\cdot(y+v)=0\ \left(x,y,u,v\in R^+\right) \Leftrightarrow \cos\omega=0 \Leftrightarrow \underline{\underline{\omega=90^\circ}}$$ ČBTD



2. príklad (259/3)

Zadanie: Každá uhlopriečka delí konvexný štvoruholník $ABCD$ na dva trojuholníky s rovnakým obsahom. Dokážte, že potom je $ABCD$ rovnobežník.

Dôkaz (priamy):

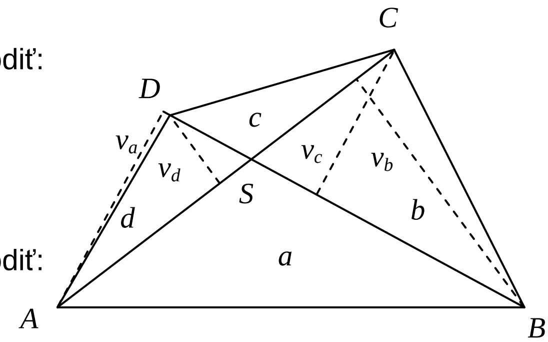
Označme S priesečník uhlopriečok AC, BC konvexného štvoruholníka $ABCD$. Ďalej označme a obsah ΔABS, b obsah ΔBCS, c obsah ΔCDS a d obsah ΔADS. Potom musí zo zadania platiť $a+b=c+d$ a zároveň $a+d=b+c$. Z týchto dvoch rovností dostávame: $a+b-a-d=d+c-b-c \Rightarrow 2b=2d \Rightarrow \underline{b=d} \Rightarrow \underline{a=c}$.

Z rovnosti obsahov ΔACB a ΔACD môžeme ďalej vyvodiť:

$$\frac{|AC|\cdot v_b}{2}=\frac{|AC|\cdot v_d}{2} \Rightarrow \underline{v_b=v_d}$$

$$b=d \Rightarrow \frac{|SC|\cdot v_b}{2}=\frac{|AS|\cdot v_d}{2} \Rightarrow |SC|=|AS| \Rightarrow \underline{S=A\div C}$$

Z rovnosti obsahov ΔBDA a ΔBDC môžeme ďalej vyvodiť:



Autor: Martin Slota

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 24: MNOHOUHOLNÍKY

$$\frac{|BD|\cdot v_a}{2}=\frac{|BD|\cdot v_c}{2}\Rightarrow \underline{v_a=v_c}$$

$$a=c\Rightarrow \frac{|SB|\cdot v_a}{2}=\frac{|DS|\cdot v_c}{2}\Rightarrow |SB|=|AD|\Rightarrow \underline{S=B\div D}$$

$(S=A\div C\wedge S=B\div D)\Rightarrow ABCD$ je rovnobežník ČBTD.

3. príklad (260/9)

Zadanie: Lichobežník $ABCD$ má obsah S. Jeho uhlopriečky sa pretínajú v bode P. Označme S_1 obsah trojuholníka ABP a S_2 obsah trojuholníka CDP. Dokážte, že $\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}=\sqrt{S}$.

Dôkaz (priamy):

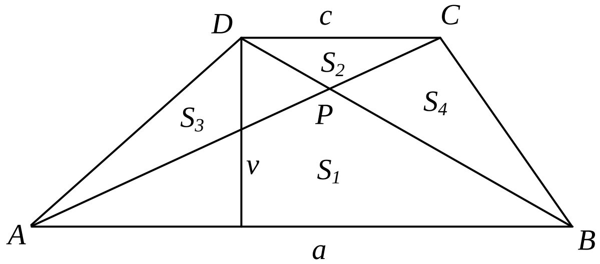
Označme v výšku lichobežníka, S_3 obsah ΔADP a S_4 obsah ΔBCP.

Platí: $\underline{S_4+S_1}=S_{\Delta ABC}=\frac{|AB|\cdot v}{2}=S_{\Delta ABD}=\underline{S_1+S_3}\Rightarrow \underline{S_3=S_4}$

Ďalej platí:

$$\frac{S_1}{S_4}=\frac{\frac{|AP|\cdot v_b}{2}}{\frac{|PC|\cdot v_b}{2}}=\frac{|AP|}{|PC|}=\frac{\frac{|AP|\cdot v_d}{2}}{\frac{|PC|\cdot v_d}{2}}=\frac{S_3}{S_2}$$

, kde v_b je výška z vrcholu B v trojuholníku ABP a v_d je výška z vrcholu D v trojuholníku CDP.



Vyjadríme S_3:

$$S_1S_2=S_3S_4$$

$$S_1S_2=S_3^2$$

$$\sqrt{S_1S_2}=S_3$$

Ešte využijeme poznatok, že celkový obsah lichobežníka je rovný súčtu obsahov trojuholníkov, na ktoré ho delia jeho uhlopriečky:

$$S=S_1+S_2+S_3+S_4$$

$$S=S_1+S_2+2\sqrt{S_1S_2}$$

$$S=\left(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}\right)^2$$

$$\underline{\underline{\sqrt{S}=\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}\ \text{ČBTD}}}$$

4. príklad (260/10)

Zadanie: V lichobežníku $ABCD$ sa súčet vnútorných uhlov pri základni AB rovná 90°. Vyjadrite dĺžku spojnice stredov základní pomocou veľkostí základní a,c.

Riešenie:

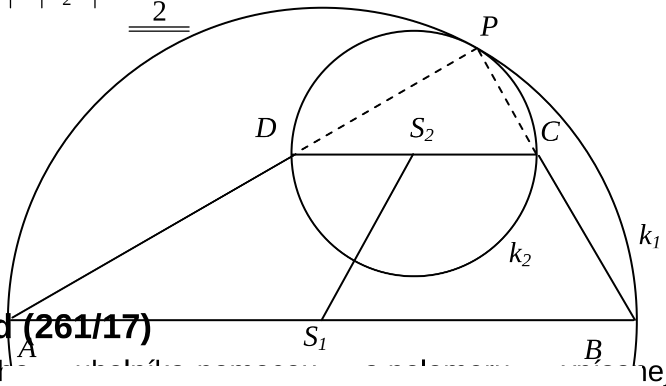
Autor: Martin Slota

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 24: MNOHOUHOLNÍKY

Označme P priesečník polpriamok $\overrightarrow{AD}$ a $\overrightarrow{BC}$. Potom musí platiť, že uhol pri vrchole P trojuholníka ABP je pravý, a teda bodom P prechádzajú Talesove kružnice nad priemermi $AB\,(k_1)$ a $CD\,(k_2)$. Ak si teda označíme S_1 stred úsečky AB a S_2 stred úsečky CD, musí platiť

$$\left(|AS_1| = \frac{a}{2} = |S_1P| \wedge |CS_2| = \frac{c}{2} = |S_2P|\right) \Rightarrow \underline{\underline{|S_1S_2|}} = |S_1P| - |S_2P| = \underline{\underline{\frac{a-c}{2}}}$$

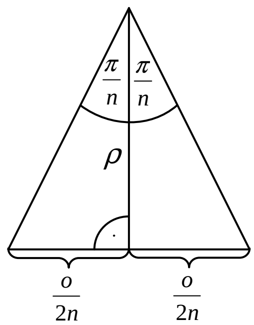


5. príklad (261/17)

Zadanie: Vyjadrite obvod o a obsah S pravidelnéh ... ej kružnice.

Riešenie:

Každý pravidelný n-uholník sa dá rozsekať na ... ré vyzerajú tak ako ten na obrázku. Obvod teda ... cie tangens:



$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{n} = \frac{\frac{o}{2n}}{\rho} \Rightarrow \underline{\underline{o = 2n\rho\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}}$$

Obsah n-uholníka vyjadríme ako n-násobok obsahu trojuholníka:

$$S = n \cdot \frac{\rho \cdot \left(2 \cdot \rho \cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}\right)}{2} = \underline{\underline{n\rho^2 \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}}$$