

## MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

### **MATURITNÝ OKRUH 1: MNOŽINY, VZŤAHY A OPERÁCIE S MNOŽINAMI**

#### 1. príklad (14/1)

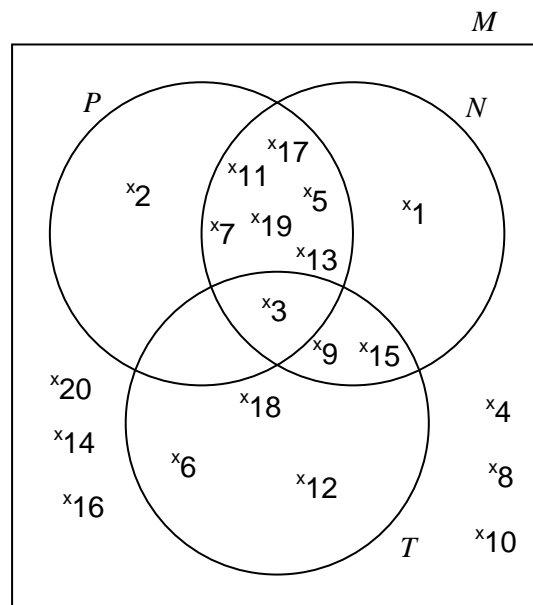
Zadanie: Označme  $M = \{1, 2, \dots, 20\}$ ,  $P$  – prvočísla z  $M$ ,  $N$  – nepárne čísla z  $M$ ,  $T$  – čísla z  $M$ , ktoré sú deliteľné tromi.

- Vypíšte prvky množiny  $N'_M - (T - (P'_M \cap N))$
- Vypíšte prvky množiny  $M - [(T'_M \cap N)'_M \cup N'_M]$
- Vyjadrite množinu  $A = \{2, 6, 12, 18\}$  pomocou množín  $M, P, N, T$  a základných množinových operácií.

Riešenie:

- $$N'_M - (T - (P'_M \cap N)) = N'_M - (T - \{1, 9, 15\}) =$$

$$= N'_M - \{3, 6, 12, 18\} = \underline{\underline{\{2, 4, 8, 10, 14, 16, 20\}}}$$
- $$M - [(T'_M \cap N)'_M \cup N'_M] = \{1, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$$
- $$A = (P \cup T) - N$$



#### 2. príklad (15/6)

Zadanie: Dokážte nasledujúce identity:

- $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$
- $A \cap (B - C) = (A - C) \cap (B - C)$

Riešenie:

- $$A - (B \cap C) = \{x \in A; x \notin (B \cap C)\} = A \cap (B \cap C)' \stackrel{\text{de Morganove pravidlá}}{=} A \cap (B' \cup C') = (A \cap B') \cup (A \cap C') =$$

$$= (A - B) \cup (A - C) \text{ ČBTD.}$$
- $$A \cap (B - C) = A \cap (B \cap C') = A \cap B \cap C' = A \cap C' \cap B \cap C' = (A \cap C') \cap (B \cap C') = (A - C) \cap (B - C)$$

$$\text{ČBTD.}$$

#### 3. príklad (15/7)

Zadanie: Rozhodnite, ktorá z nasledujúcich dvoch inklúzií platí pre ľubovoľné tri množiny  $A, B, C$ . Na príklade konkrétnych množín ukážte, že ju vo všeobecnosti nemožno nahradiť rovnosťou.

## MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

### **MATURITNÝ OKRUH 1: MNOŽINY, VZŤAHY A OPERÁCIE S MNOŽINAMI**

a)  $A - (B - C) \subset A - (B \cup C)$

b)  $A - (B \cup C) \subset A - (B - C)$

Riešenie (pozri obrázok):

a) nemusí platiť, rovnosť nastáva práve vtedy, keď  $(A \cap C) = \{\}$

b) platí

Konkrétny príklad:

$$A = \{1, 2, 3, 7\}$$

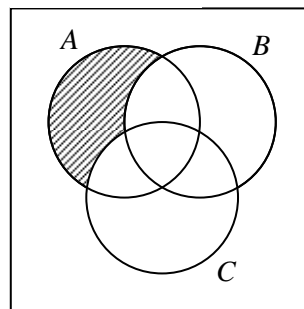
$$B = \{2, 3, 4, 6\}$$

$$C = \{1, 3, 4, 5\}$$

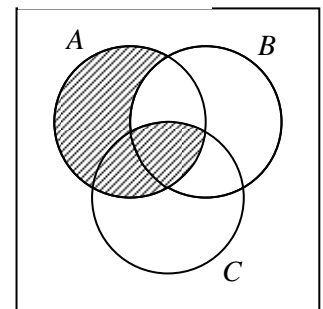
$$A - (B - C) = \{1, 3, 7\}$$

$$A - (B \cup C) = \{7\}$$

$A - (B \cup C)$ :



$A - (B - C)$ :



### 4. príklad (15/13)

**Zadanie:** Koľko existuje permutácií čísl 1, 2, 3, 4, 5, v ktorých žiadna cifra nie je na tom istom mieste ako v permutácii 12345?

**Riešenie:**

$P_{\text{žiadna cifra nie je na svojom mieste}} = 5! - P_{\text{aspoň jedna cifra je na svojom mieste}} = 5! - P_{A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5}$  ( $A_i$  je množina všetkých

permutácií, v ktorých  $i$  je na svojom mieste) =  $5! - \left[ \sum_{i=1}^5 P(A_i) - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^5 P(A_i \cap A_j) + \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i < j < k}}^5 P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \right.$

$$\left. \sum_{\substack{i,j,k,l=1 \\ i < j < k < l}}^5 P(A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) \right] = 5! - \left[ \binom{5}{1} \cdot 4! - \binom{5}{2} \cdot 3! + \binom{5}{3} \cdot 2! - \binom{5}{4} \cdot 1! + 1 \right] =$$

$$= 5! - 5! + 60 - 20 + 5 - 1 = \underline{\underline{44}}$$

Permutácií hore spomenutých vlastností je 44.

### 5. príklad (13/Pr. 3)

**Zadanie:** Koľko je medzi prirodzenými číslami od 1 do 1000 takých, ktoré nie sú deliteľné dvoma, ani tromi, ani piatimi?

**Riešenie:**

Najprv si označme množiny:  $M = \{1, 2, \dots, 1000\}$ ,  $D_2 = \{x \in M; 2 \mid x\}$ ,  $D_3 = \{x \in M; 3 \mid x\}$ ,  $D_5 = \{x \in M; 5 \mid x\}$

Našou úlohou je zistiť počet prvkov množiny  $(D_2 \cup D_3 \cup D_5)'_M$ .

Platí:  $|(D_2 \cup D_3 \cup D_5)'_M| = 1000 - |D_2 \cup D_3 \cup D_5|$ . Teraz využijeme princíp inklúzie a exklúzie:

$$|D_2 \cup D_3 \cup D_5| = |D_2| + |D_3| + |D_5| - |D_2 \cap D_3| - |D_2 \cap D_5| - |D_3 \cap D_5| + |D_2 \cap D_3 \cap D_5|$$

## MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

### ***MATURITNÝ OKRUH 1: MNOŽINY, VZŤAHY A OPERÁCIE S MNOŽINAMI***

Počet prvkov množín na pravej strane rovnice dokážeme vyjadriť:

$$|D_2| = 500, |D_3| = 333, |D_5| = 200$$

$D_2 \cap D_3$  je množina čísel z  $M$ , ktoré sú deliteľné šiestimi  $\Rightarrow |D_2 \cap D_3| = 166$ .

$D_2 \cap D_5$  je množina čísel z  $M$ , ktoré sú deliteľné desiatimi  $\Rightarrow |D_2 \cap D_5| = 100$ .

$D_3 \cap D_5$  je množina čísel z  $M$ , ktoré sú deliteľné pätnástimi  $\Rightarrow |D_3 \cap D_5| = 66$ .

$D_2 \cap D_3 \cap D_5$  je množina čísel z  $M$ , ktoré sú deliteľné tridsiatimi  $\Rightarrow |D_2 \cap D_3 \cap D_5| = 33$ .

Teda  $|D_2 \cup D_3 \cup D_5| = 500 + 333 + 200 - 166 - 100 - 66 + 33 = 734$ .

Čísel od 1 do 1000, ktoré nie sú deliteľné žiadnym z čísel 2, 3, 5, je  $1000 - 734 = 266$ .