Autor: Martin Slota

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 7: MOCNINY

1. príklad (82/Pr. 4)

Zadanie: Určte, ktoré z čísel e^{π}, π^{e} je väčšie.

Riešenie:

Vyjdeme z hypotézy, že $e^{\pi} > \pi^{e}$, a tú dokážeme, alebo vyvrátime. Nerovnicu zlogaritmujeme pri základe e:

$$\pi \cdot \ln e > e \cdot \ln \pi$$

$$\frac{\ln e}{e} > \frac{\ln \pi}{\pi}$$

Teraz vyšetríme priebeh funkcie $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ na $\langle e, \pi \rangle$:

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Keďže prvá derivácia funkcie f nadobúda pre čísla väčšie než e záporné hodnoty, je funkcia f klesajúca na intervale $\langle e, \infty)$.

Keďže $e < \pi$, platí aj $f(e) > f(\pi)$ a naša hypotéza je dokázaná (čiže $e^{\pi} > \pi^{e}$).

2. príklad (83/7)

Zadanie: Určte hodnotu súčinu, ktorý má nekonečný počet činiteľov: $\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[8]{3} \cdot \sqrt[16]{3} \cdot \ldots$ (Tento súčin chápeme ako limitu postupnosti čiastočných súčinov podobne ako pri súčte nekonečného radu.)

Riešenie:

Najprv si výraz upravíme: $\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[8]{3} \cdot \sqrt[16]{3} \cdot \ldots = 3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots}$. Teraz nám už stačí vypočítať súčet nekonečného radu $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$. Podaktorí asi už vedia, že to bude 1, ale to by na mature asi neobstálo, takže sa to pokúsime vyjadriť podľa vzorca. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ je teda nekonečný geometrický rad s kvocientom $q = \frac{1}{2}$ a prvým členom $a_1 = \frac{1}{2}$. Jeho súčet je teda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1.$$

Teraz už iba dosadíme: $\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[8]{3} \cdot \sqrt[16]{3} \cdot \ldots = 3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots} = 3^{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}} = 3^1 = \underline{\underline{3}}$

3. príklad (83/11)

Zadanie: Určte všetky reálne čísla x, pre ktoré platí $\frac{6x - 5\sqrt{x} + 1}{1 - \sqrt{x}} \leq 0$.

Autor: Martin Slota

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

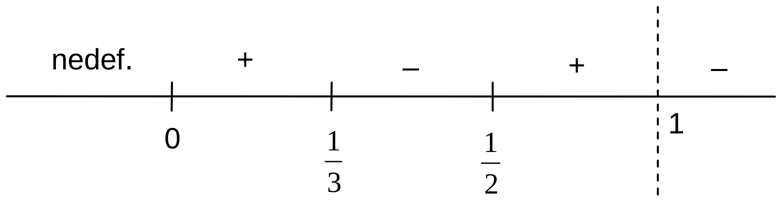
MATURITNÝ OKRUH 7: MOCNINY

Riešenie:

Zavedieme si substitúciu $y=\sqrt{x}$ (takže $y>0$) a nerovnicu upravíme:

$$\frac{6y^2-5y+1}{1-y}\le 0$$

$$\frac{6\cdot\left(y-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(y-\frac{1}{3}\right)}{1-y}\le 0$$



Výsledok teda je: $y\in\left\langle\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right\rangle\cup(1,\infty)\Rightarrow \underline{\underline{x\in\left\langle\frac{1}{9},\frac{1}{4}\right\rangle\cup(1,\infty)}}$.

4. príklad (83/13)

Zadanie: Pre každé kladné celé číslo n platí $28\,|\,\left(40^n-8^n-5^n+1\right)$. Dokážte.

Dôkaz (priamy):

Výraz si upravíme: $40^n-8^n-5^n+1=8^n\cdot\left(5^n-1\right)-\left(5^n-1\right)=\left(8^n-1\right)\cdot\left(5^n-1\right)$. Platí vzorec $\left(a^n-b^n\right)=(a-b)\cdot\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}\right)$, a preto:

$$\left.\begin{array}{l} 8^n-1=8^n-1^n=(8-1)\cdot\left(8^{n-1}+8^{n-2}+\ldots+8+1\right)\Rightarrow 7\,|\,\left(8^n-1\right)\\ 5^n-1=5^n-1^n=(5-1)\cdot\left(5^{n-1}+5^{n-2}+\ldots+5+1\right)\Rightarrow 4\,|\,\left(5^n-1\right)\end{array}\right\}\Rightarrow 28\,|\,\left(\left(8^n-1\right)\cdot\left(5^n-1\right)\right)\Rightarrow 28\,|\,\left(40^n-8^n-5^n+1\right)$$

ČBTD.

5. príklad (84/22)

Zadanie: Určte všetky reálne čísla x, pre ktoré sa štvrtý člen binomického rozvoja výrazu $\left(x^{\frac{1}{2(1+\log x)}}+\sqrt[12]{x}\right)^6$ rovná 200.

Riešenie:

Všeobecný zápis binomického rozvoja je:

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}\cdot a^n+\binom{n}{1}\cdot a^{n-1}b+\ldots+\binom{n}{k}\cdot a^{n-k}b^k+\ldots+\binom{n}{n}b^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\cdot a^{n-i}b^i$$

Pre náš konkrétny prípad:

Autor: Martin Slota

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 7: MOCNINY

$$\binom{6}{3}\cdot x^{\frac{3}{2(1+\log x)}}\cdot\left(\sqrt[12]{x}\right)^3=200$$

$$20\cdot x^{\frac{3}{2(1+\log x)}+\frac{1}{4}}=200$$

$$x^{\frac{6+1+\log x}{4(1+\log x)}}=10$$

$$\frac{6+1+\log x}{4(1+\log x)}\cdot\log x=\log 10 \qquad y=\log x$$

$$\frac{7y+y^2}{4+4y}=1$$

$$y^2+3y-4=0$$

$$(y+4)\cdot(y-1)=0$$

$$y=-4\Rightarrow x=10^{-4}$$

$$y=1\Rightarrow x=10$$

$$\underline{\underline{K=\{10^{-4},10\}}}$$