

## MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

### **MATURITNÝ OKRUH 6: NELINEÁRNE ROVNICE A NEROVNICE**

#### **1. príklad (74/3)**

Zadanie: Pre korene kvadratickej nerovnice  $x^2 - 2rx - 7r^2 = 0$  platí  $x_1^2 + x_2^2 = 18$ . Určte hodnotu parametra .

Riešenie:

Z Vietových vzťahov vieme:  $x_1 + x_2 = 2r$  a  $x_1 x_2 = -7r^2$ . Využijeme teda prvý vzťah, dosadíme doňho druhý a aj zadanú rovnosť:

$$(x_1 + x_2)^2 = 4r^2$$

$$x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2 = 4r^2$$

$$18 + 2 \cdot (-7r^2) = 4r^2$$

$$18 = 18r^2$$

$$r = \pm 1$$

Množina hodnôt parametra je teda:  $\{1, -1\}$ .

#### **2. príklad (74/9)**

Zadanie: Nájdite všetky reálne korene rovnice  $x^6 + x^5 - 2x^4 - x^2 - x + 2 = 0$ .

Riešenie:

Rovnicu upravíme:

$$x^6 + x^5 - 2x^4 - x^2 - x + 2 = 0$$

$$x^4 \cdot (x^2 + x - 1) - (x^2 + x - 2) = 0$$

$$(x^4 - 1) \cdot (x^2 + x - 2) = 0$$

$$(x^2 - 1) \cdot (x^2 + 1) \cdot (x + 2) \cdot (x - 1) = 0$$

$$(x + 1) \cdot (x - 1) \cdot (x^2 + 1) \cdot (x + 2) \cdot (x - 1) = 0$$

$$(x + 1) \cdot (x - 1)^2 \cdot (x^2 + 1) \cdot (x + 2) = 0$$

Z úpravy vidieť, že množinou koreňov rovnice je:  $\{1, -1, -2\}$ .

#### **3. príklad (76/22)**

Zadanie: V  $R$  vyriešte nerovnicu  $\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > \frac{1}{2}$ .

Riešenie:

Keďže obe čísla pod odmocninami musia byť kladné alebo 0, musí platiť, že  $x \in \langle -1, 3 \rangle$ .

Teraz nerovnicu upravíme:

## MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

### **MATURITNÝ OKRUH 6: NELINEÁRNE ROVNICE A NEROVNICE**

$$\sqrt{3-x} > \frac{1}{2} + \sqrt{x+1} \quad (>0 \Rightarrow \text{umocnenie je ekvivalentná úprava})$$

$$3-x > \frac{1}{4} + \sqrt{x+1} + x+1$$

$$\frac{7}{4} - 2x > \sqrt{x+1}$$

Keďže pravá strana je kladná alebo 0, musí byť  $2x \leq \frac{7}{4} \Rightarrow x \leq \frac{7}{8}$ .

Ešte raz nerovnicu umocníme:

$$4x^2 - 7x + \frac{49}{16} > x+1$$

$$4x^2 - 8x + \frac{33}{16} > 0$$

$$\left(x-1+\frac{\sqrt{31}}{8}\right) \cdot \left(x-1-\frac{\sqrt{31}}{8}\right) > 0$$

Z tejto nerovnice vyplýva, že  $x \in \left(-\infty, 1-\frac{\sqrt{31}}{8}\right) \cup \left(1+\frac{\sqrt{31}}{8}, \infty\right)$ . Keď však dáme všetky tri poznatky

dohromady, dostaneme:  $x \in \left(-1, 1-\frac{\sqrt{31}}{8}\right)$ .

#### **4. príklad (76/24)**

**Zadanie:** V  $R$  riešte rovnicu s parametrom  $a \in R$ :  $|x| - |x-8| = |a+4| + |4-a|$ .

**Riešenie:**

Vety, z ktorých vychádzame (dôkazy sú dosť jednoduché):  $\forall a, b \in R; |a| + |b| \geq |a+b| \wedge |a| - |b| \leq |a-b|$

Teraz tieto vety využijeme:  $8 = |x-x+8| \geq |x| - |x-8| = |a+4| + |4-a| \geq |a+4+4-a| = 8$

Z tohto zápisu vidíme, že znamienka nerovnosti môžeme nahradiť znamienkami rovnosti, pričom vieme, že tento prípad nastáva práve vtedy, keď výrazy  $a+4$  a  $4-a$  majú rovnaké znamienko (toto vyplýva z dôkazu spomínaných viet). To isté musí platiť aj pre výrazy  $x$  a  $x-8$ . Keby však mali výrazy  $a+4$  a  $4-a$  obidva záporné znamienko, po dosadení by sme dostali:  $-a-4-4+a = -8 \neq 8$ . Rovnaká situácia by nastala, keby výrazy  $x$  a  $x-8$  mali oba záporné znamienko. Preto musia byť všetky spomínané výrazy kladné. Potom platí:

1.  $((a+4 \geq 0) \wedge (4-a \geq 0)) \Rightarrow a \in \langle -4, 4 \rangle$

2.  $((x \geq 0) \wedge (x-8 \geq 0)) \Rightarrow \langle 8, \infty \rangle$

**Záver:**

$a$	$K$
$a \in \langle -4, 4 \rangle$	$\langle 8, \infty \rangle$
$a \in (-\infty, -4) \cup (4, \infty)$	$\emptyset$

## MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

### **MATURITNÝ OKRUH 6: NELINEÁRNE ROVNICE A NEROVNICE**

#### **5. príklad (75/19)**

Zadanie: Nájdite všetky riešenia v obore kladných reálnych čísel:

$$x_1 + \frac{1}{x_2} = 2$$

$$x_2 + \frac{1}{x_3} = 2$$

⋮

$$x_{100} + \frac{1}{x_1} = 2$$

Riešenie:

Keď všetky rovnice sčítame a poprehadzujeme členy, dostaneme:

$$\left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right) + \left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right) + \dots + \left(x_{100} + \frac{1}{x_{100}}\right) = 200$$

Platí veta:  $\forall k \in \mathbb{R}^+; k + \frac{1}{k} \geq 2$ , pričom  $\left(k + \frac{1}{k} = 2\right) \Leftrightarrow (k = 1)$ .

Podľa tejto vety teda pre súčet ľavých strán rovníc platí:

$$\left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right) + \left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right) + \dots + \left(x_{100} + \frac{1}{x_{100}}\right) \geq 200$$

Aby nastala rovnosť, musia byť všetky neznáme rovné 1. Sústava rovníc má teda jediné riešenie, a to  $x_1 = x_2 = \dots = x_{100} = 1$ .

Tvrdenie:  $\forall k \in \mathbb{R}^+; k + \frac{1}{k} \geq 2$

Dôkaz:

$$\forall k \in \mathbb{R}^+; k + \frac{1}{k} \geq 2 \Leftrightarrow k^2 + 2 + \frac{1}{k^2} \geq 4 \Leftrightarrow k^2 - 2 + \frac{1}{k^2} \geq 0 \Leftrightarrow \left(k - \frac{1}{k}\right)^2 \geq 0$$

Keďže mocnina reálneho čísla je väčšia alebo rovná nule, je tvrdenie dokázané.

pozn.: Rovnosť nastáva  $\Leftrightarrow \left(k - \frac{1}{k}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow k - \frac{1}{k} = 0 \Leftrightarrow k = \frac{1}{k} \Leftrightarrow k^2 = 1 \Leftrightarrow k = \pm 1 (k \in \mathbb{R}^+) \Leftrightarrow \underline{k = 1}$