Autor: Martin Slota

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 19: NUMERICKÉ METÓDY

1. príklad (212/Pr. 3)

Zadanie: Vhodnou iteračnou metódou vypočítajte hodnotu $\sqrt{7}$ aspoň na 5 desatinných miest.

Riešenie:

Aby sme mohli použiť iteračnú metódu, musíme nájsť vhodnú rovnicu tvaru $g(x)=x$, ktorej riešením je $x=\sqrt{7}$. Takýchto rovníc je veľa, my však musíme zvoliť takú funkciu $g(x)$, aby iterácia konvergovala. Jednou z takých vhodných rovníc je napríklad $x=\frac{x^2+7}{2x}$, ktorá má korene $\pm\sqrt{7}$.

Na začiatku si zvolíme $x_0 = 2 \left(\sqrt{7} \doteq 2\right)$. Ďalšie aproximácie dostaneme z rekurentného vzťahu $x_{n+1}=\frac{x_n^2+7}{2x_n}$, a teda:

$$x_2=\frac{4+7}{4}=2{,}75$$
$$x_3=2{,}647727273$$
$$x_4=2{,}645752048$$
$$x_5=2{,}645751311$$

$x_6=x_5$ (pri danej presnosti výpočtov)

Vypočítali sme teda hodnotu $\sqrt{7}$ s presnosťou na 9 desatinných miest a táto hodnota je 2,645751311.

2. príklad (215/1)

Zadanie: Metódou polenia intervalov nájdite koreň rovnice $x\sin x=1$ v intervale $\langle 0; 1{,}5\rangle$.

Riešenie:

V prvom rade musíme rovnicu $x\sin x=1$ upraviť do tvaru $f(x)=0$, čiže $x\sin x-1=0$. Začiatočný interval $\langle a,b\rangle=\langle 0;1{,}5\rangle$ máme daný (spĺňa podmienku $f(a)\cdot f(b)<0$). Ďalší interval dostaneme tak, že vypočítame funkčnú hodnotu stredu s_1 tohto intervalu a použijeme ho ako hranicu intervalu spolu s jednou z pôvodných hraníc tak, aby pre hranice nového intervalu $\langle a_1,b_1\rangle$ platilo $f(a_1)\cdot f(b_1)<0$:

$$s_1=\frac{a+b}{2}=0{,}75$$
$$f(s_1)<0 \Rightarrow \langle a_1,b_1\rangle=\langle 0{,}75;1{,}5\rangle$$

A tak pokračujeme ďalej:

$$s_2=\frac{a_1+b_1}{2}=1{,}125$$
$$f(s_2)>0 \Rightarrow \underline{\langle a_2,b_2\rangle=\langle 0{,}75;1{,}125\rangle}$$

$$s_3=\frac{a_2+b_2}{2}=0{,}9375$$
$$f(s_3)<0 \Rightarrow \underline{\langle a_3,b_3\rangle=\langle 0{,}9375;1{,}125\rangle}$$

Autor: Martin Slota

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 19: NUMERICKÉ METÓDY

$s_4 = \dfrac{a_3+b_3}{2} = 1{,}03125$

$f(s_4) < 0 \Rightarrow \underline{\langle a_4, b_4\rangle = \langle 1{,}03125; 1{,}125\rangle}$

$s_5 = \dfrac{a_4+b_4}{2} = 1{,}078125$

$f(s_5) < 0 \Rightarrow \underline{\langle a_5, b_5\rangle = \langle 1{,}078125; 1{,}125\rangle}$

$\langle a_6, b_6\rangle = \langle 1{,}1015625\,;\,1{,}125\rangle$

$\langle a_7, b_7\rangle = \langle 1{,}11328125\,;\,1{,}125\rangle$

$\langle a_8, b_8\rangle = \langle 1{,}11328125\,;\,1{,}119140625\rangle$

$\langle a_9, b_9\rangle = \langle 1{,}11328125\,;\,1{,}116210938\rangle$

$\langle a_{10}, b_{10}\rangle = \langle 1{,}11328125\,;\,1{,}114746094\rangle$

$\langle a_{11}, b_{11}\rangle = \langle 1{,}114013672\,;\,1{,}114746094\rangle$

Koreňom rovnice $x \sin x = 1$ v danom intervale s presnosťou na 3 desatinné miesta je $\dfrac{a_{11}+b_{11}}{2} = 1{,}114379883$.

3. príklad (215/3)

Zadanie: Newtonovou metódou nájdite koreň rovnice $x + \ln x = 0$.

Riešenie:

Aby sme mohli použiť Newtonovu metódu dotyčníc, musíme si zistiť prvú deriváciu funkcie $f(x) = x + \ln x$. Táto prvá derivácia je $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$. Ako počiatočnú aproximáciu si zvolíme $x_1 = 1$.

Každú ďalšiu aproximáciu získame z rekurentného vzťahu $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. Takže:

$$x_2 = 1 - \frac{1+\ln 1}{1+\frac{1}{1}} = 0{,}5$$

$$x_3 = 0{,}564382393$$

$$x_4 = 0{,}567138987$$

$$x_5 = 0{,}567143290$$

$$x_6 = x_5$$

Koreňom rovnice $x + \ln x = 0$ s presnosťou na 9 desatinných miest je teda 0,567143290.

4. príklad (216/13)

Zadanie: Odvoďte z Newtonovej metódy dotyčníc spôsob výpočtu tretích odmocnín.

Riešenie:

Riešenie predvedieme všeobecne pre n – tú odmocninu z čísla $a\ (a \in R^+)$ a potom odvodíme vzorec pre tretiu odmocninu. Najprv si musíme určiť funkciu, ktorej korene budeme určovať, a taktiež jej prvú deriváciu:

$$x = \sqrt[n]{a} \Rightarrow f(x) = x^n - a = 0$$

$$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

Teraz dostávame rekurentne zadanú postupnosť, ktorá konverguje k n – tej odmocnine z čísla $a = x_0$:

Autor: Martin Slota

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 19: NUMERICKÉ METÓDY

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^n - a}{n \cdot x_k^{n-1}} = x_k - \frac{1}{n} x_k + \frac{a}{n \cdot x_k^{n-1}} = \frac{1}{n}\left[(n-1)\cdot x_k + \frac{a}{x_k^{n-1}}\right]$$

Konkrétne pre tretiu odmocninu je rekurentné vyjadrenie tejto postupnosti $x_{k+1} = \frac{1}{3}\left(2x_k + \frac{a}{x_k^2}\right)$.

5. príklad (216/16)

Zadanie: Vypočítajte približnú hodnotu $\sqrt{10}$ nasledujúcou metódou: využite rovnosť $\sqrt{10} = 3\cdot\sqrt{1+\frac{1}{9}}$ a Mac Laurinov rad pre funkciu $y = \sqrt{1+x}$.

Autor: Martin Slota

MATURITNÉ PRÍKLADY Z MATEMATIKY

MATURITNÝ OKRUH 19: NUMERICKÉ METÓDY

Riešenie:

Všeobecný zápis MacLaurinovho radu je: $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f^{(n-1)}(0)\cdot\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$. Aby sme ním vyjadrili funkciu $f(x)=\sqrt{1+x}$, potrebujeme hodnotu jej derivácií v bode nula:

$$f(x)=\sqrt{1+x} \Rightarrow f(0)=1$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(0)=\frac{1}{2}$$

$$f''(x)=-\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow f''(0)=-\frac{1}{4}$$

$$f'''(x)=\frac{3}{8}(1+x)^{-\frac{5}{2}} \Rightarrow f'''(0)=\frac{3}{8}$$

$$f^{IV}(x)=-\frac{15}{16}(1+x)^{-\frac{7}{2}} \Rightarrow f^{IV}(0)=-\frac{15}{16}$$

Spomínanú funkciu teda môžeme vyjadriť takto: $\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\cdot\frac{x^2}{2}+\frac{3}{8}\cdot\frac{x^3}{3!}-\frac{15}{16}\cdot\frac{x^4}{4!}+\dots$

Teda platí: $\sqrt{10}=3\cdot\sqrt{1+\frac{1}{9}}=3\cdot\left[1+\frac{1}{2\cdot 9}-\frac{1}{4\cdot 2\cdot 81}+\frac{3}{8\cdot 6\cdot 729}-\frac{15}{16\cdot 24\cdot 6561}+\dots\right]\doteq 3{,}162276377$